

Кыргыз Республикасынын Илим, жогорку билим берүү жана
инновациялар министрлиги

“Б.Осмонов атындагы Жалал-Абад мамлекеттик
университети” илимий билим берүү өндүрүштүк комплекси

М. Н. Нурматова

МАТЕМАТИКАЛЫК ЛОГИКА

Окуу колдонмосу



Манас
2026

УДК 510.6
ББК 22.12
Н90

Б.Осмонов атындагы ЖАМУнун Методикалык кеңешинин 2025-жылдын 18-декабрындагы жыйынында каралып, колдонууга жана басмага сунушталды.

Рецензенттер:

Ош мамлекеттик университетинин “Информациялык системалар жана программалоо” кафедрасынын башчысы, ф.-м.и.к., доцент **Токторбаев А.** ЖАМУнун “Математика жана математикалык моделдештирүү” кафедрасынын доценти, п.и.к. **Ураимхалилова А.**

Нурматова, М.Н.

Н90 Математикалык логика: Окуу колдонмосу.
– Манас: 2026. – 92 б.
ISBN 978-9967-09-514-4

Окуу колдонмо математикалык логиканын негизги бөлүмдөрү: айтылыштар алгебрасы, предикаттар логикасы, Бульдук функциялар бөлүмдөрүн камтыйт. эмгекте математикалык логиканын концептуалдык аппараты практикалык мисалдар менен түшүндүрүлүп, студенттердин алган билимдерин бекемдөө үчүн контролдук суроолор менен коштолгон.

Колдонмо 550200 “Физика-математикалык билим берүү” багытынын (математика, информатика профилдери) күндүзгү жана сырттан окуу бөлүмдөрүнүн студенттери үчүн сунушталат.

ISBN 978-9967-09-514-4

УДК 510.6
ББК 22.12

© Нурматова М.Н., 2026

КИРИШ СӨЗ

Логика жалпы адамзат маданиятынын катмарын түзөт, ансыз бүгүнкү күндө бир дагы ой жүгүрткөн адам өнүгө албайт. Математикалык логика 20-кылымда жетишилген логиканын өнүгүшүнүн туу чокусун билдирет. Аристотелден бери келе жаткан салттуу логиканы заманбап математиканын ыкмалары менен органикалык түрдө айкалыштыруу терең жана таң калаарлык натыйжаларды берди, аларды этибарга албоо математиканы изилдегендер, окуткандар үчүн гана эмес, ой жүгүртүү, негиздөө, далилдөө ыкмалары болгон ар бир адам үчүн мүмкүн эмес болуп калды. Мындан тышкары, математикалык логика аркылуу алынган натыйжалар компьютерлерди жаратуу жана алардын программалык камсыздоосун түзүү үчүн негиз болуп, информатика областында кеңири колдонуу жана жасалма интеллект системасын тапты.

Бул окуу колдонмодо “Математикалык логика” курсунун негизги бөлүмдөрү камтылган. “Заманбап билим берүү системасындагы математикалык логика” аттуу киришүүдөн кийин, материалдар ырааттуулукта берилген: айтылыштар алгебрасы, тавтологиялар, Бульдук функциялар, нормалдык формалар, предикаттар логикасы боюнча темалар камтылды.

Азыркы билим берүү системасындагы математикалык логика

Адамдын ой жүгүртүү ишмердүүлүгү аң сезим аркылуу же аң сезимсиз деңгээлдерде ишке ашырылуучу татаал жана көп кырдуу процесс. Ой жүгүртүүнүн эң маанилүү сапаты болуп, жаңы фактыларды ачуу, ойлоп табуу жөндөмдүүлүгү эсептелет.

Логика жана интуиция – адамдын ой жүгүртүүсүнүн эки карама-каршы жана өз ара ажырагыс байланышкан касиеттери. Дедуктивдик (логикалык) ой жүгүртүү белгилүү бир жыйынтык чыгарыла турган логикалык ой жүгүртүүнүн бир түрү. Ал тажрыйбага да, интуицияга да, башка тышкы факторлорго да таянылбайт. Интуиция чындыкты түздөн-түз таанып-билүү менен түшүнүүнүн өзгөчө жолу.

Формалдуу логика жана Аристотель

Салттуу (формалдуу) логиканын негиздөөчүсү болуп, байыркы гениалдуу ойчул (б.з.ч. 394-322 жылдарда) катары эсептелген байыркы грек философу, логик, окумуштуу-энциклопедист Аристотель – билимдин дээрлик бардык областтары боюнча белгилүү эмгектердин укмуштуудай жыйнагын жараткан универсалдуу окумуштуулугу менен белгилүү болгон. Ал биринчилерден болуп, логиканы өз алдынча дисциплина катары илимге системалуу киргизген.

“Логика” термини Аристотель тарабынан колдонулбаган. Биринчи жолу “логика” термини стоиктердин эмгектеринде пайда болгон. Стоикалык мектептердин өкүлдөрү (Зенон, болжолдуу б.з.ч. 336-264 жж.) ой жүгүртүү ишмердүүлүгүндөгү закондорду изилдөөчү илимди белгилөө үчүн “логика” терминин киргизишкен. Алар логиканы өзүнө физиканы жана этиканы камтыган философиянын бир бөлүгү катары карашкан. Логиканын максаты – адамдын акылын адашуудан арылтуу жана чындыкка жол жана критерий табууга үгүттөө.

Символдук логика жана Лейбниц

Лейбниц Г.В. (1646-1716) логиканы ой жүгүртүү жана далилдөө искусствосу катары эмес, ойлоп табуучулук жана жаңы чындыктарды ачуу искусствосу катары түшүнгөн. Ага Аристотелдин силлогистикасы чоң таасир эткен.

Аристотелдин силлогистикасы – талдоо жана корутундулоо үчүн Аристотель тарабынан иштелип чыккан логикалык система. Ал эки негизден жана корутундудан турган ой жүгүртүү формаларын түшүндүргөн силлогизмдерди колдонууга негизделген. Аристотель логиканы чындыкка жеткирүү үчүн курал деп эсептеп аны “аналитика” деп атаган.

Мисал:

1-негиз: бардык адамдар өлүмгө ээ.

2-негиз: Сократ – адам.

Корутунду: Натыйжада, Сократ өлүмгө ээ.

Лейбницти тартип менен өлчөмдү изилдөөчү Декарттын “жалпы математика” жөнүндө көтөрүлүп жаткан идеясы таасирленткен. Ал мындай деп жазган: “Силлогикалык форманы жаратуу – адам рухунун укмуштуудай жана эң маанилүү ачылыштарынын бири. Бул өзүнчө универсалдуу математика, мунун маанисинин баары азырынча жетишээрлик түшүнүктүү эмес”.

Логика сөзү гректердин “logos – сөз, ой, кеп, акыл” деген сөзүнөн алынып, логика илими ой жүгүртүү менен туура чечим кабыл алуу усулдары жана мыйзамдары жөнүндөгү илим болуп саналат.

Ал үч бөлүктөн турат:

- диалектикалык логика;
- математикалык логика;

- формалдуу логика.

Диалектикалык логика – адамдын ой жүгүртүүсүндө объективдүү дүйнөнүн турпатынын чагылуу абалы жана чындыкты таанып – билүүнүн мыйзам ченемдери жөнүндөгү илим. Анын элементтерин байыркы *Гераклит, Платон, Аристотель* ж. б. ойчулдардын эмгек-теринде, ал эми таанып-билүүнүн, ой жүгүртүүнүн жалпы принциптери жана методдору боюнча *Бекон, Декарт, Лейбниц* ж.б. окууларында жолуктурууга болот. Диалектикалык логиканы өнүктүрүүгө *Кант* менен *Гегель* белгилүү салым кошушкан. Анын негизги маселеси: заттардын кыймыл-аракетин диалектиканын мыйзамдары аркылуу түшүнүктөрдө чагылдырууну изилдөө, анын негизинде ой жүгүртүүнүн өзүнүн өнүгүшүн үйрөнүү, таанып – билүүнүн жалпы мыйзам ченемдери болуп эсептелет.

Формалдуу логика – ойдун формаларынын (ойдо талдоо, ой корутуу, түшүнүү, далилдөө ж. б.) логикалык түзүлүшүн үйрөтүүчү илим. Формалдуу логиканын негизги максаты – корутунду билимге ээ болуу жараянында сакталуучу мыйзамдарды жана принциптерди иштеп чыгуу болуп саналат.

Математикалык логика – математиканын формалдуу методдорун жана математикалык ой жүгүртүүлөр менен далилдөөлөрдүн, логикалык изилдөөлөрдү колдонуунун натыйжасында түзүлгөн билимдер тармагы. Математикалык логикада логикалык процесстер – логикалык эсептөөлөр сыяктуу формалдаштырылган тилдерде, аларды чагылдыруу аркылуу изилденет. Логикалык эсептөөлөрдүн формалдуу түзүлүшүн изилдөө менен катар эле, эсептөөлөр жана алардын интерпретациясы менен моделдери болуп кызмат кылуучу мазмундуу тармактардын ортосундагы катыш – байланыштарды кароо милдети да турат.

Математиканы окутууда логика математиканын педагогикасынын инструменти катары роль ойнойт.

Математиканын педагогикасы үчүн логика өзгөчө инструмент. Ал – метод эмес, окутуунун формасы да, окутуунун каражаты да эмес. Ал – инструмент. Экинчиден, логика математиканын педагогикасынын предмети болуп саналат, башкача айтканда математиканын жардамында жана математиканын алкагында изилденүүчү объект.

Математиканы окутууда, логиканы таасир этүүчү инструмент кылуу үчүн, төмөнкүдөй принциптерди сактоо керек:

1. Математикалык ырастоолорду түзүүнү (структураны) окутуу принциби;

2. Математикалык теореманы далилдөө түшүнүгүн окутуу принциби;

3. Математикалык теоремаларды далилдөө методдорун окутуу принциби;

4. Математикалык теорияларды түзүүнү окутуу принциби.

Математикалык логика аталган логикалык принциптерди колдонууну жеңилдетип жана негиздегенге көмөк көрсөтөт.

Текшерүү үчүн суроолор:

Логика деген эмне?

Интуиция деген эмне?

Логиканын канча түрү бар?

Алардын кандай айырмачылыктарын белгилей аласыңар?

Логика математикада кандай роль ойнойт?

Айтылыштар алгебрасы

Математикалык логиканын изилдөө ыкмаларында математикалык тамга – символдор, сөз – сүйлөмдөр менен кошо, логиканын өзүнүн символдордон куралган тили колдонулат. Логиканын негизги түшүнүктөрүнүн бирин “*Айтылыш*” дейбиз. Айтылыштардын алгебрасы математикалык логиканын фундаменти болуп саналат.

Аныктама. *Логикада чын же жалган деп бир мааниде мүнөздөөгө мүмкүн болгон жай сүйлөмдү - “айтылыш” деп атайбыз.*

Айтылыштарга бир нече мисал келтирели:

A_1 : “Бишкек – Кыргызстандын борбору”;

A_2 : “Ош шаары Ак-Буура дарыясы менен кооз”;

A_3 : “ $5 > 4$ ”

A_4 : “*Сократ – адам*”;

A_5 : “ $10 < 9$ ”

A_6 : Алыкул Осмонов – белгилүү математик”

A_7 : “ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ”

Чын айтылышка 1 белгисин, жалган айтылышка 0 белгисин коюуну макулдашалы.

Аныктама: Айтылыштардын жыйындысында берилген жана төмөнкүдөй эреженин негизинде $\{0,1\}$ көптүгүндө λ функциясын киргизели:

$$\lambda(P) = \begin{cases} 1, \text{ эгер } P \text{ чын айтылыш болсо,} \\ 0, \text{ эгер } P \text{ жалган айтылыш болсо} \end{cases}$$

λ функциясы – чындык функциясы деп аталат, ал эми $\lambda(P)$ мааниси P айтылышынын логикалык мааниси же чындык мааниси деп аталат.

Келтирилген айтылыштар үчүн төмөнкүдөй логикалык маанилерге ээ болобуз: $\lambda(A_1) = 1$, $\lambda(A_3) = 1$, $\lambda(A_4) = 1$, $\lambda(A_5) = 0$, $\lambda(A_6) = 0$.

Адабияттарда чын айтылыш: 1, Ч, t (truth-чын), 0, ж, f (false-жалган) деп белгиленет. Демек, **Айтылыш** бир учурда чын жана жалган боло албайт.

Аныктамада айтылгандай, суроолуу, илептүү сүйлөмдөр айтылыш боло албайт. Логикада айтылыштарды чоң тамгалар менен белгилеп жазып, анын мазмунуна эмес, чын же жалган экендигине гана маани берилип, айтылыштардын арасындагы катыш-байланыштары изилденет.

Математикалык логикада “*Айтылыштарды*” толук изилдөө системасы “предикаттар логикасы” аркылуу толукталат.

Аныктама: Өзгөрүлмө чоңдуктар катышкан сүйлөмдү – “предикат” деп атайбыз. Предикат өзгөрүлмөлөрдүн ар башка маанилеринде “чын” же “жалган” маанилерди кабыл алышы мүмкүн.

Мисалы, $x^2 - 9 = 0$ – сүйлөмү предикат болот.

Ал өзгөрүлмөлөрдүн $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ маанилеринде “чын”, ал эми калган маанилерде “жалган” айтылыш болот.

Жогоруда баяндалган математикалык тамга – белгилер жана логикалык символдордун баары, реалдуу дүйнөдө жашабаган, кыялыбызда гана формалдуу белгиленген түзүлүштөр болушат.

Математикалык логиканын бүгүнкү милдети: кыялыбызда кабыл алган формалдуу символдорду кыялыбызда киргизилген амалдар аркылуу байланыштырып, реалдуу дүйнөдөгү процесстердин математикалык моделдерин түзүп, моделдер аркылуу туура чечимдерди кабыл алуу усулдарын изилдөө болуп эсептелет.

Айтылыштардын тануусу

Эгер P айтылышы берилсе, ага карама-каршы болгон – *айтылыштын тануусу* деп аталган жаңы айтылышты алабыз.

Ал $\neg P$ аркылуу белгиленет, “ P эмес ” же “ P экендиги чын эмес” деп окулат.

$\lambda(P)$	$\lambda(\neg P)$
0	1
1	0

Аныктама. P айтылышынын *тануусу* деп, P чын болгондо жалган, P жалган болгондо, чын болгон $\neg P$ айтылышын айтабыз.

Айтылыштар	Айтылыштардын тануусу
$\frac{2}{3}$ – рационалдык сан $\lambda(P) = 1$	$\frac{2}{3}$ – рационалдык сан эмес $\lambda(\neg P) = 0$
19 – курама сан $\lambda(P) = 0$	19 – курама сан эмес $\lambda(\neg P) = 1$
13 – жөнөкөй сан $\lambda(P) = 1$	13 – жөнөкөй сан эмес $\lambda(\neg P) = 0$
2 саны $x - 27 = 19$ теңдемесинин тамыры	2 саны $x - 27 = 19$ теңдемесинин тамыры эмес

$\lambda(P) = 0$	$\lambda(\neg P) = 1$
7 саны 56 санынын бөлүүчүсү. $\lambda(P) = 1$	7 саны 56 санынын бөлүүчүсү эмес $\lambda(\neg P) = 0$

Айтылыштардын конъюнкциясы

“Конъюнкция” сөзү латындын “conjunction” деген сөзүнөн келип чыгып, “бириктир” деген маанини билдирет. Жөнөкөй айтылыштардан “жана” байламтасы аркылуу курама айтылыш түзүүгө болот.

Мисалы, “Бегимай тартиптүү жана окуунун отличниги”.

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \wedge Q)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Аныктама. Эки айтылыштын экөө тең чын болгондо гана чын, калган учурлардын баарында жалган болгон курама айтылыш, берилген айтылыштардын *конъюнкциясы* деп аталат жана $P \wedge Q$ (P жана Q) деп белгиленет.

Мисалы, P – “12 саны 3кө бөлүнөт”, Q – “12 саны 4кө бөлүнөт”.

$P \wedge Q$ - “12 саны 3кө жана 4кө бөлүнөт”.

Айтылыштардын дизъюнкциясы

“Дизъюнкция” деген сөз латындын “disjunction” сөзүнөн алынган, кыргызча “айырмалайм, бөлүп көрсөтөм” деген маанини билдирет.

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \vee Q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Аныктама. P жана Q айтылыштарынын экөө тең жалган болгондо гана жалган, калган учурлардын бардыгында чын болгон курама айтылыш, ал айтылыштардын *дизъюнкциясы* деп аталат жана $P \vee Q$ түрүндө белгиленет.

Мисалы, P : “ $8 > 5$ ” жана Q : “ $8 = 5$ ” айтылыштары берилсе, анда алардын дизъюнкциясы $P \vee Q$: “ $8 \geq 5$ ” айтылышы болот.

Айтылыштардын импликациясы

“Импликация” сөзү латындын “implication” деген сөзүнөн алынган, кыргызча “тыгыз байланыштырам” деген маанини түшүндүрөт.

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \rightarrow Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Аныктама. P айтылышы чын, Q айтылышы жалган болгондо гана жалган, калган учурлардын баарында чын болгон айтылыш, ал айтылыштардын *импликациясы* деп аталат жана $P \rightarrow Q$ (P болсо, Q болот) деп белгиленет.

Мында, P – импликациянын шарты, Q – импликациянын корутундусу деп аталышат.

Мисалы, P – “36 саны жуп сан”, Q – “36 саны экиге бөлүнөт” деген жөнөкөй айтылыштары берилсе, анда алардын импликациясы $P \rightarrow Q$: “Эгер 36 саны жуп сан болсо, анда ал 2ге бөлүнөт” айтылышы болот.

Айтылыштардын эквиваленциясы

Аныктама. Эгерде P жана Q айтылыштары берилсе, анда жогоркулардан айырмаланган “ P болгондо гана Q болот” деген курама айтылыш түзүүгө болот.

Ал $P \leftrightarrow Q$ түрүндө белгиленип, P жана Q айтылыштарынын *эквиваленциясы* деп аталат.

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \leftrightarrow Q)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Айтылыштардын эквиваленциясы алардын экөө тең чын же экөө тең жалган болгондо гана чын, башка учурларда жалган болот.

Мисалы: P : “175 саны 3кө бөлүнөт”, Q : “175 санындагы цифралардын суммасы 3 кө бөлүнөт” айтылыштары берилсе, анда төмөнкү эквиваленциялар гана чын болушат.

а) “175 саны – анын цифраларынын суммасы 3кө бөлүнгөндө гана, 3кө бөлүнөт”,

б) “175 саны – анын цифраларынын суммасы 3кө бөлүнбөгөндө гана, 3кө бөлүнбөйт”.

Текшерүү үчүн суроолор:

Айтылыш деген эмне?

Айтылыштардын үстүнөн кандай логикалык операциялар жүргүзүлөт?

Айтылыштардын тануусу, дизъюнкциясы, конъюнкциясы, импликациясы, эквиваленциясы деген эмне?

Негиздеп мисалдарды келтиргиле.

Айтылыштар алгебрасынын формулалары

Логикалык операциялардагы касиеттер:

$$\neg 0 = 1$$

$$\neg 1 = 0$$

$$0 \wedge 0 = 0$$

$$0 \wedge 1 = 0$$

$$1 \wedge 0 = 0$$

$$1 \wedge 1 = 1$$

$$0 \rightarrow 0 = 1$$

$$0 \rightarrow 1 = 1$$

$$1 \rightarrow 0 = 0$$

$$1 \rightarrow 1 = 1$$

$$\lambda(\neg P) = \neg \lambda(P).$$

$$\lambda(P \wedge Q) = \lambda(P) \wedge \lambda(Q)$$

$$\lambda(P \vee Q) = \lambda(P) \vee \lambda(Q)$$

$$\lambda(P \rightarrow Q) = \lambda(P) \rightarrow \lambda(Q)$$

$$\lambda(P \leftrightarrow Q) = \lambda(P) \leftrightarrow \lambda(Q)$$

Жалпы түрдө $\lambda(P * Q) = \lambda(P) * \lambda(Q)$, мында * белгиси $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ логикалык операциялардын белгилеринин бирин түшүндүрөт.

Ой жүгүртүү, тил, логика

Киришүүдө биз логиканы туура ой жүгүртүү формалары жана закондору жөнүндө илим катары аныктаганбыз. Эгер ой жүгүртүү процессинин бөлүгү аң сезимде жүргүзүлсө, анда алардын жыйынтыктарынын туюнтулушу көмүскө дээррибиздин деңгээлинде ишке ашат, албетте тилдин жардамында. Тил кандайдыр бир өлчөмдө ой жүгүртүү процессин жана анын натыйжасын чагылдырат. Көмүскө дээрдин тереңдигинде жаралган ой тилде сүйлөм аркылуу (ырастоо, айтылыш, ой корутуу) туюнтулат. Ойдун негизги касиети болуп чындык же жалган маани эсептелет.

Курама айтылыштарды конструкциялоо

Жөнөкөй айтылыштардан андан татаалыраак айтылыштарды логикалык операциялардын жардамында түзүүгө болот. Мисалы,

A₁: Жалал-Абад Ысык-Көлдүн жээгинде жайгашкан;

A₂: бардык адамдар өлүмгө ээ;

A₃: И.Разаков – улуу жазуучу.

Анда “Эгер Жалал-Абад – Ысык-Көлдүн жээгинде жайгашса жана бардык адамдар өлүмгө ээ болсо, анда И.Разаков – улуу жазуучу болот”.

Түзүлгөн айтылыш символдук түрдө төмөнкүчө жазылат:

$$(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_3$$

Албетте, бул сүйлөм маанилик жактан байланышпайт, себеби ал бири-биринен айырмаланган ар түрдүү мазмундагы түшүнүктөрдөн куралган.

Бирок, бизди айтылыштын мазмуну эмес, анын логикалык мааниси кызыктырат.

Ал берилген айтылыштардын логикалык маанисинен жана курама айтылыш түзүлгөн схемадан аныкталат.

Анткени

$$\lambda(A_1) = 0,$$

$$\lambda(A_2) = 1,$$

$$\lambda(A_3) = 0,$$

анда жогорудагы тиешелештиктерге ылайык,

$$\begin{aligned} \lambda((A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_3) &= \lambda(A_1 \wedge A_2) \rightarrow \lambda(A_3) = \\ &= (\lambda(A_1) \wedge \lambda(A_2)) \rightarrow \lambda(A_3) = (0 \wedge 1) \rightarrow 0 = \\ &= 0 \rightarrow 0 = 1. \end{aligned}$$

Демек, $(A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_3$ айтылышы чын.

Бул курама айтылышты жөнөкөй айтылыштардан конструкциялоо үчүн, биринчи 2 айтылышка конъюнкциялоо операциясын колдонуп, андан кийин алынган айтылышка жана үчүнчү берилген айтылышка импликация операциясын колдонуу керек: $((X \wedge Y) \rightarrow Z)$, мында X, Y, Z – кандайдыр бир символдор (өзгөрүлмөлөр), алардын ордуна каалаган конкреттүү айтылышты коюуга болот.

Мындай жол менен курама айтылыштарды алуу бардык айтылыштар үчүн колдонууга ылайыктуу.

Аныктама. $((X \wedge Y) \rightarrow Z)$ формуласына X, Y, Z өзгөрүлмөлөрүнүн ордуна конкреттүү айтылыштарды коюуга болот, андан кийин формула кандайдыр бир курама

айтылышка айланат. Ордуна коюлуп жаткан өзгөрүлмөлөр – айтылыштар, башкача айтканда айтылыштардын көптүгүндөгү өзгөрүлмөлөр – пропозиционалдык өзгөрүлмөлөр же айтылыштык өзгөрүлмөлөр же өзгөрүлмө айтылыштар деп аталат.

Пропозиционалдык өзгөрүлмөлөрдү латын алфавитинин чоң тамгалары менен же индекси бар ошол эле тамгалар аркылуу белгилейбиз.

Аныктама (айтылыштар алгебрасынын формуласы):

1. Ар бир өзүнчө алынган пропозиционалдык өзгөрүлмө айтылыштар алгебрасынын формуласы болуп саналат.

2. Эгер F_1 жана F_2 – айтылыштар алгебрасынын формуласы болсо, анда

$$(\neg F_1), (F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2), (F_1 \rightarrow F_2), (F_1 \leftrightarrow F_2)$$

туюнтмалары да айтылыштар алгебрасынын формулалары болуп саналат.

3. 1-2-пункттарга ылайык алынган айтылыштар алгебрасынын башка формулалары жок.

Мындай типтеги аныктама **индуктивдик** деп аталат. Аларда 1-2-пункттар камтылат, анык термин менен аталган объектилер берилет (бул учурда айтылыштардын алгебрасынын формулалары), жана кыйыр пункт (3-пункт) анда мындай объектилер жокко чыгарылат. 1-пункт базистик пункт болуп саналат. Анда кандайдыр бир объект так берилип, аталат жана индуктивдик пункт (бул учурда 2-пункт), анда базистик пунктта аталган аныкталуучу объектилерди алуу эрежелери берилет.

Формуланы аныктоонун индуктивдик мүнөзү эки өз ара тескери маселелерди чечүүгө мүмкүнчүлүк берет. Биринчиден, бар болгон формулалардан ага караганда татаалыраак формулаларды алуу, экинчиден,

пропозиционалдык өзгөрүлмөлөрдөн, логикалык операциялардын символдоруна жана кашаалардан түзүлгөн туюнтма айтылыштардын алгебрасынын формуласы болоорун аныктоо. Экинчи маселени чечүү үчүн төмөнкүнү белгилейбиз. Ар бир формула үчүн, ошол формулага кирген пропозиционалдык өзгөрүлмөлөрдөн башталып, ошол эле формула менен аяктаган, жана ошол удаалаштыктын ар бир мүчөсү пропозиционалдык өзгөрүлмө болбогон, же ошол удаалаштыктагы мүчөнү тануучу, же удаалаштыктын мүчөлөрүнүн “же, жана, мындан, ... болгондо гана, ... орун алат” белгилеринин биринин жардамында бириктирилген бардык анын формулаларынын чектүү удаалаштыгы жашашы керек болот.

Мындай формулалардын удаалаштыгын кээде берилген формула үчүн жаратуучу удаалаштык деп атайбыз. Логикалык туюнтулуштагы мындай удаалаштык туюнтма – формула болушу үчүн чен-өлчөм же критерий катары кызмат кылат.

Формула болуп эсептелбеген туюнтмаларга мисал келтирели:

$((XY) \rightarrow Z)$ – 2-пунктка ылайык формула болмок, эгер (XY) жана Z туюнтмалары формула болсо. Z – туюнтмасы пропозиционалдык өзгөрүлмө, жана 1-пунктка ылайык формула болмок. (XY) туюнтмасын карайлы, ал формула болуп эсептелмек, эгерде алардын арасында логикалык байланыштагы белги болсо, бирок андай белги жок. Натыйжада (XY) – формула эмес. Демек, $((XY) \rightarrow Z)$ – формула эмес.

Төмөнкү мисалдар да формула болуп саналбайт:

$$((P \neg Q) \wedge (P \rightarrow \neg R)),$$

$$(P \wedge Q \vee R),$$

$$((X \rightarrow) \wedge Z),$$

$$X \vee \neg Y.$$

Акыркыдагы туюнтма – формула болбогондугунун себеби, жалпы кашаанын жоктугунан.

Курама айтылыштардын логикалык мааниси

Эгер $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ айтылыштардын алгебрасынын формуласында $X_1, X_2, \dots, X_n$ пропозиционалдык өзгөрүлмөлөрдүн ордуна $A_1, A_2, \dots, A_n$ конкреттүү айтылыштарын койсок, анда тиешелүү түрдө $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ жаңы курама айтылышын алмакпыз. Ал $A_1, A_2, \dots, A_n$ айтылыштарын тандоодогу $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ формуласынын конкреттештирилиши деп аталат.

Компоненттер	Мектептик алгебра	Логикалык алгебра
Базистик көптүктөр	R	
Базистик көптүктөрдүн элементтеринин үстүнөн операциялар	$+, -, \cdot, :$	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
Өзгөрүлмөлөр	Чыныгы $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$	Пропозиционал- дык $P, Q, R, \dots, X, Y, Z, \dots$
Формулалар (туура түзүлгөн туюнтмалар)	$ax + by + cz,$ $ax^2 + bx + c$ ж.б.	$(\neg P \wedge Q) \leftrightarrow R,$ $\neg(P \wedge Q) \vee R$ ж.б.

Текшерүү үчүн суроолор:

Айтылыштар алгебрасынын негизги формулаларынын мааниси кандайча?

Курама айтылыштар жөнөкөй айтылыштардан эмнеси менен айырмаланат?

Айтылыштар алгебрасынын тавтологиялары

Тавтологиянын мааниси

Айтылыштардын түзүүчүлөрүнүн чын экендигинен жана мазмунунан көз-каранды түрдө чын айтылыштарды түзүү схемасы тавтологияны түшүндүрөт. “Саратов 1590-жылы негизделген”, “Күн жердин айланасында айланат” айтылыштарынын чын же жалган экендигин ырастоо үчүн, атайын билимдерге ээ болуу керек же атайын адабияттарга көз чаптырып чыгуу керек. ал эми “АВС үч бурчтугу тик, же АВС тик бурчтугу тик эмес”, “Тукум куучулук белгилер жөнүндө маалымат генде сакталат деген туура эмес, ошол маалымат да генде сакталат” айтылыштардын чындык маанисин аныктоо үчүн математикада да, генетикада да билимдерге ээ болуунун кереги жок. Акыркы айтылыштардын чындыгы жөнүндө корутундуну алардын мазмунунан, формасынан, структурасынан чыгарабыз. Биринчи айтылыштын структурасы $X \vee \neg X$ формуласы аркылуу, ал эми экинчиси $\neg(X \wedge \neg X)$ формуласы аркылуу туюнтулат. Бул эки формулалар тавтологиянын маңызы экендигине алып келет. Берилген формулалар чын айтылыштарды түзүүнүн эки схемасын берет. Тавтология болуп эсептелген ар бир формула ушундай болот. Бирок тавтологиянын эң негизги мааниси мында эмес.

Тавтологиянын негизги мааниси – алардын айрымдары ой корутууларды түзүү ыкмаларын түшүндүрөт, башкача айтканда чын негизден чын корутундуга алып келет. Дал ушундай ой жүгүртүүлөр биздин билимдерди тереңдетет жана туура маалыматтарга байытат. Айрым учурларда, айтылыштар алгебрасынын $F \rightarrow G$ түрдөгү каалаган тавтологиясы кандайдыр бир логикалык ой корутуунун жалпы схемасына туура келет. Айтылгандарды мисалда көрсөтүлгөн төмөнкүдөй түрдөгү тавтологиянын мисалында түшүнөлү:

$((\neg X \rightarrow Y) \wedge (\neg X \rightarrow \neg Y)) \rightarrow X$ – кандай логикалык схемага туура келээрин аныктоого аракет кылалы.

Берилген тавтологияны мүнөздөөчү логикалык ой корутуунун схемасы кээде математикалык далилдөөлөрдө колдонулат. Ал төмөнкүчө: кандайдыр бир A ырастоосунун чын экендигин далилдөө талап кылынсын дейли. Анын $\neg A$ тануусу чын болсун дейли. Андан кийин $\neg A \rightarrow B$ жана $\neg A \rightarrow \neg B$ ырастоолору чын боло тургандай кандайдыр бир B ырастоосу далилденет. Бул импликациялардын чындыгынын далилдениши A жана B айтылыштарынын мазмунунан көз-каранды жана алар таандык болгон математикалык теориянын методдорунун жана закондорунун негизинде орнотулат. $\neg A \rightarrow B$ жана $\neg A \rightarrow \neg B$ ырастоолору чын экендиги орнотулсун дейли. Бир эле учурда B жана $\neg B$ ырастоолорунун бири-бирине карама-каршылыгы жөнүндө корутунду – бул туура келбеген тыянак. Анда A айтылышы чын экендигин ырастайбыз. Мындай жол менен далилдөө акылга сыйбаган нерсеге келтирүү методу деп аталат.

“Тавтология” термини грекчеден которулуп, “ошол эле сөз” дегенди түшүндүрөт жана ошол эле аныктаманы, талкууну ага мааниси жагынан жакын сөз менен кайталоону түшүндүрөт. Албетте, тавтология – бул ошол эле нерсе. Бул көбүнчө эквиваленция логикалык байланышы менен аныкталат. Мисалы,

$$- \quad (P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

тавтологиясы анын оң жак жана сол жак бөлүгүндөгү бирдей форманы (формулануу) туюнтат. Бул жерде кеп, ар түрдүү сөздөр – формалар (формулалар) аркылуу туюнтулган ички, мазмундук, семантикалык окшоштукта болуп жатат.

- Ушундай мааниге аналогиялуу түрдө:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Бул дагы ички маңызы боюнча түрдүү сөздөрдүн жардамында туюнтулган.

Бул туюнтмалардын ар бири өзүнүн чөйрөсүндө кызмат аткаруучу объективдүү закон: биринчиси ой жүгүртүү процессинин сферасында, экинчиси сандардын сферасында. Бул закондордун ар бири бизди курчап турган дүйнөнүн кайсы бир бөлүгү жөнүндө объективдүү маалымат алып жүрөт.

Негизги тавтологиялар

Математикалык далилдөөлөрдүн айрым схемаларына негизделген тавтологияларды жана логикалык операциялардын касиеттерин туюнтуучу тавтологияларды карайлы.

Теорема. Төмөнкү айтылыштар алгебрасынын формулалары тавтологиялар болуп эсептелинишет:

А) үчүнчүнү жокко чыгаруу закону:

$$P \vee \neg P;$$

Б) карама-каршылыкты тануу закону:

$$\neg(P \wedge \neg P);$$

В) эки жолку тануу закону:

$$\neg\neg P \leftrightarrow P;$$

Г) теңдештик закону:

$$P \rightarrow P;$$

Д) контрапозиция закону:

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P);$$

Е) чынжыр эрежеси:

$$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R);$$

Ж) карама-каршылык закону:

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$$

3) антецедент кошуу эрежеси (эмнеден болсо да, чындыкты алуу):

$$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

И) “жалгандан эмнени болсо да алуу” эрежеси:

$$\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

К) модус поненс эрежеси:

$$(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$$

Л) модус толленс эрежеси:

$$((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$$

М) негиздерди орундаштыруу:

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$$

Н) учурларды талдоо эрежеси:

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$$

О) учурларды талдоо эрежеси:

$$((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R)$$

П) абсурдга алып келүү эрежеси:

$$((\neg P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)) \rightarrow P,$$

$$(\neg P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)) \rightarrow P.$$

Конъюнкция жана дизъюнкциянын касиеттери

Төмөнкү айтылыштар алгебрасынын формулалары тавтологиялар болуп саналышат:

А. Алмашылгыс закон:

$$(P \wedge P) \leftrightarrow P, (P \vee P) \leftrightarrow P;$$

Б. Жөнөкөйлөтүү закону:

$$(P \wedge Q) \rightarrow P, P \rightarrow (P \vee Q);$$

В. Коммутативдүүлүк закону:

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P); (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$$

Г. Ассоциативдүүлүк закону:

$$(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R),$$

$$(P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$$

Д. Дистрибутивдик закону

$$(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

$$(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$

Е. Сиңирүү закону

$$P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow P, (P \vee (P \wedge Q)) \leftrightarrow P;$$

Ж. Де Морган закону

$$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q),$$

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q).$$

Импликация жана эквиваленциянын касиеттери

Төмөнкү айтылыштардын алгебрасынын формулалары тавтологиялары болуп саналат:

а. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R));$

б. $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q));$

в. $(P \rightarrow R) \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R);$

г. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow R);$

д. $((\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \neg P);$

е. $(\neg P \wedge (P \vee Q) \rightarrow Q);$

ж. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow (Q \vee R));$

з. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R));$

и. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

- к. $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P);$
- л. $(\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow ((\neg Q \rightarrow P) \rightarrow Q);$
- м. $((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q)) \leftrightarrow ((P \vee R) \rightarrow Q);$
- н. $((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R));$
- о. $P \rightarrow P;$
- п. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P);$
- р. $((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)) \rightarrow (P \leftrightarrow R).$

Бир логикалык операциянын экинчиси аркылуу туюнтулушу

Алгебралык айтылыштардын төмөнкү формулалары тавтологиялар болуп саналат.

- а. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q);$
- б. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q);$
- в. $(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q);$
- г. $(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(P \rightarrow \neg Q);$
- д. $(P \vee Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q);$
- е. $(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow Q);$
- ж. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$

Тавтологияларды алуунун негизги эрежелери

1. Корутунду чыгаруу эрежеси (бөлүп алуу эрежеси)

Эгер F жана $F \rightarrow H$ формулалары тавтологиялар болуп эсептелсе, анда H формуласы да тавтология болуп саналат:

$$\models F \text{ жана } \models F \rightarrow H \Rightarrow \models H$$

2. Ордуна коюу эрежеси

Теорема 1: (Тыянак чыгаруу эрежеси)

Эгер F жана $F \rightarrow H$ формулалары тавтологиялар болуп эсептелсе, анда H формуласы да тавтология болуп саналат:

$$\models F \text{ жана } \models F \rightarrow H \Rightarrow \models H$$

Аныктама. Тыянак чыгаруу эрежеси модус поненс эрежеси деп аталат.

Теорема 2: (ордуна коюу эрежеси)

Эгер X пропозиционалдык өзгөрүлмөсүн камтыган F формуласы тавтология болуп саналса, анда F формуласына X өзгөрүлмөсүнүн ордуна каалагандай H формуласын коюудан кайра тавтология алынат:

$$\models F \Rightarrow \models S_X^H F.$$

Аныктама. Каралган 2 тавтологияны түзүү эрежелерин – *модус поненсти жана ордуна коюуну* – негизги эрежелер деп атайбыз. Мындан башка да эрежелер бар, аларды экинчи (кошумча) же туунду эрежелер деп атайбыз.

Текшерүү үчүн суроолор:

Тавтология деген эмне? Мисал келтир.

Үчүнчүнү жокко чыгаруу законун мүнөздөгөн тавтологияны жаз.

Эмнелердин касиеттери тавтология болот?

Формулалардын логикалык тең күчтүүлүгү

Аныктама: Айтылыштар алгебрасынын $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ жана $G(X_1, X_2, \dots, X_n)$ формулалары **тең күчтүү (эквиваленттүү)** деп аталышат, эгерде аларга камтылган F жана G формулаларынан алынган пропозиционалдык өзгөрүлмөлөрдүн логикалык маанилери дал келсе. $F \cong G$ тең күчтүүлүк формуласынын белгилениши. Тең күчтүү формулаларды символдук түрдө төмөнкүчө жазууга болот:

$\forall (A_1, A_2, \dots, A_n)$ айтылыштары:

$$F \cong G \Leftrightarrow \lambda(F(A_1, A_2, \dots, A_n)) = \lambda(G(A_1, A_2, \dots, A_n)) \quad (1)$$

Мисалы: $\neg X_1$, $\neg X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_1)$ формулаларынын тең күчтүүлүгүн текшерели.

Ал үчүн X_1, X_2 пропозиционалдык өзгөрүлмөлөрүнүн маанилеринин көптүгү үчүн формулаларга ылайык, чындык таблицасын түзөлү:

$\lambda(X_1)$	$\lambda(X_2)$	$\lambda(\neg X_1)$	$\lambda(X_2 \vee \neg X_1)$	$\lambda(\neg X_2 \wedge (X_2 \vee \neg X_1))$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	0

Формулалардын тең күчтүүлүк белгиси

Белгинин мааниси формулалардын тең күчтүүлүгү жана тавтология түшүнүктөрүнүн ортосундагы тыгыз байланышты аныктоодо турат.

Теорема 3. *(формулалардын тең күчтүүлүк белгиси)* Айтылыштар алгебрасынын F жана G формулалары тең күчтүү болот, качан гана $F \leftrightarrow G$ формуласы тавтология болуп саналса:

$$F \cong G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G. \quad (2)$$

Формулалардын тең күчтүүлүгү – бул формулалардын үстүнөн (логикалык) операция эмес, айтылыштар логикасынын формулаларынын ортосундагы катыш экендигин баса белгилей кетүү керек. Бул болсо, эгер F жана G – формулалар болсо, анда $F \cong G$ айтылыштар алгебрасынын формуласы болбой тургандыгын түшүндүрөт. Ал кандайдыр бир формулалардын ортосундагы өз ара байланыш жөнүндө ырастоо, болгону символдук түрдө кыскартылып жазылат.

Ал ырастоо же чын же жалган болот, башкача айтканда эки айтылыш же тең күчтүү же тең күчтүү эмес.

Натыйжа. Айтылыштар алгебрасынын формулаларынын ортосундагы $\cong$ тең күчтүүлүк катышы:

А) рефлексивдүү: $F \cong F$;

Б) симметриялуу: эгер $F_1 \cong F_2$ болсо, анда $F_2 \cong F_1$;

В) транзитивдүү: эгер $F_1 \cong F_2$ жана $F_2 \cong F_3$, анда $F_1 \cong F_3$,

башкача айтында тең күчтүүлүк катышы эквиваленттүүлүк катышы болуп саналат.

Теорема 4: Төмөнкү тең күчтүүлүктөр орун алат:

а. $\neg\neg P \cong P$;

б. $P \rightarrow Q \cong \neg Q \rightarrow \neg P$;

- в. $P \leftrightarrow Q \cong \neg P \leftrightarrow \neg Q$;
- г. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \cong (P \wedge Q) \rightarrow R$;
- д. $(P \rightarrow R) \rightarrow (Q \rightarrow R) \cong (P \vee Q) \rightarrow R$
- е. $P \wedge P \cong P$;
- ж. $P \vee P \cong P$;
- з. $P \wedge Q \cong Q \wedge P$;
- и. $P \vee Q \cong Q \vee P$;
- к. $P \wedge (Q \wedge R) \cong (P \wedge Q) \wedge R$;
- л. $P \vee (Q \vee R) \cong (P \vee Q) \vee R$;
- м. $P \wedge (Q \vee R) \cong ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$;
- н. $P \vee (Q \wedge R) \cong (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$;
- о. $P \wedge (P \vee Q) \cong P$;
- п. $P \vee (P \wedge Q) \cong P$;
- р. $\neg(P \wedge Q) \cong \neg P \vee \neg Q$;
- с. $\neg(P \vee Q) \cong \neg P \wedge \neg Q$;
- т. $P \leftrightarrow Q \cong Q \leftrightarrow P$;
- у. $P \rightarrow Q \cong \neg P \vee Q$
- ф. $P \rightarrow Q \cong \neg(P \wedge \neg Q)$;
- х. $P \wedge Q \cong \neg(P \rightarrow \neg Q)$;
- ц. $P \vee Q \cong \neg P \rightarrow Q$;
- ч. $P \leftrightarrow Q \cong (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$;
- ш. $P \vee \neg P \cong 1, P \wedge \neg P \cong 0$;
- щ. $P \vee 1 \cong 1, P \wedge 1 \cong P$;
- ы. $P \vee 0 \cong P, P \wedge 0 \cong 0$.

Формулаларды тең күчтүү өзгөртүп түзүү

4-теоремадагы тең күчтүүлүктөргө таянып, бир формуладан ага тең күчтүү формулага өтө алабыз. Мындай өзгөртүү берилген формуланы тең күчтүү өзгөртүп түзүү деп аталат. Тең күчтүү өзгөртүп түзүүлөр формулаларды жөнөкөйлөтүү үчүн колдонулат.

1-мисал. $\neg(X_1 \rightarrow \neg X_2) \wedge \neg(X_2 \rightarrow \neg X_1)$ формуласын жөнөкөйлөтөлү:

$$\begin{aligned} & \neg(X_1 \rightarrow \neg X_2) \wedge \neg(X_2 \rightarrow \neg X_1) \cong \\ & \cong \neg(\neg X_1 \vee \neg X_2) \wedge \neg(\neg X_2 \vee \neg X_1) \cong \\ & \cong \neg(\neg X_1 \vee \neg X_2) \wedge \neg(\neg X_1 \vee \neg X_2) \cong \\ & \cong \neg(\neg X_1 \vee \neg X_2) \wedge \neg\neg X_1 \vee \neg\neg X_2 \cong X_1 \wedge X_2. \end{aligned}$$

Эскертүү: Эгер кандайдыр бир формула тавтология болуп саналса, анда ага тең күчтүү болгон каалагандай формула да тавтология болуп саналат:

$$\models F \text{ жана } F \cong G \Rightarrow \models G.$$

Мектептик алгебрада	Логикалык алгебрада
$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ тендештиги $a, b \in R$ чыныгы өзгөрүлмөлөрдүн бардык маанилеринде теңдеш барабардыктын оң жана сол жагындагы маанилер бирдей маанилерди кабыл алаарын түшүндүрөт.	$\neg(P \wedge Q) \cong \neg P \vee \neg Q$ тең күчтүүлүгү $P, Q \in \{0, 1\}$ пропозиционалдык өзгөрүлмөлөрдүн бардык маанилеринде оң жактагы жана сол жактагы туюнтмалар бирдей маанилерди кабыл алаарын түшүндүрөт.

Текшерүү үчүн суроолор:

Формулалардын тең күчтүүлүгүнүн белгиси кандай?

Кандай тең күчтүүлүктөр орун алат?

Айтылыштар алгебрасынын нормалдык формалары

Айтылыштар алгебрасынын ар бир формуласы үчүн танууну, конъюнкцияны жана дизъюнкцияны камтыган ага тең күчтүү формуланы көрсөтүүгө болот. Ал үчүн 4-теореманын тең күчтүүлүктөрүнө таянып, формуладагы импликация жана эквиваленттүүлүктөрдү тануу, конъюнкция жана дизъюнкциялар аркылуу туюнтууга болот. Алсак, $(\neg X \wedge (X \rightarrow Y)) \rightarrow Y$ формуласы үчүн, $\rightarrow, \leftrightarrow$ логикалык байланыштарды камтыбаган $\neg(\neg X \wedge (\neg X \vee Y)) \vee Y$ формуласы тең күчтүү болот. Бул формуланы тануу, конъюнкция жана дизъюнкция аркылуу бир гана жол менен эмес, көптөгөн жолдор менен туюнтууга болот. Каралып жаткан формула $\neg, \wedge, \vee$ логикалык байланыштарын камтыган төмөнкү формулаларга тең күчтүү:

$$\neg\neg X \vee Y,$$

$$X \vee Y,$$

$$(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y),$$

$$(X \wedge \neg Y) \vee Y,$$

$$(X \wedge \neg Y) \vee ((X \vee \neg X) \wedge Y),$$

$$(X \wedge \neg Y) \vee ((X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y)).$$

Бардык бул мүмкүн болгон туюнтмалар $\neg, \wedge, \vee$ аркылуу туюнтулган.

Нормалдык форма түшүнүгү

Аныктама. $X_1, X_2, \dots, X_n$ өзгөрүлмөлөрүнүн конъюнкциялык бир мүчөсү деп, бул өзгөрүлмөлөрдүн же алардын тануусунун конъюнкциясы аталат.

Мисалы:

$$X_1 \wedge X_1,$$

$$X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3,$$

$$X_2 \wedge \neg X_1 \wedge X_3 \wedge X_2 \wedge X_5,$$

$$X_3 \wedge X_2 \wedge \neg X_1 \wedge X_3 \wedge X_1.$$

Аныктама. $X_1, X_2, \dots, X_n$ өзгөрүлмөлөрүнүн **дизъюнкциялык бир мүчөсү** деп, бул өзгөрүлмөлөрдүн же алардын тануусунун дизъюнкциясы аталат.

Мисалы:

$$X_2 \vee X_{21},$$

$$\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3,$$

$$X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3 \vee X_4 \vee X_5,$$

$$\neg X_2 \vee X_1 \vee X_4 \vee X_1 \vee X_4.$$

Аныктама. **Дизъюнкциялык нормалдык форма** деп, конъюнкциялык бир мүчөлөрдүн дизъюнкциясы аталат, башкача айтканда, $K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_p$ түрүндөгү туюнтма, мында K_i – конъюнкциялык бир мүчөлөр, $i = 1, 2, \dots, p$.

Аныктама. Аналогиялуу түрдө **конъюнкциялык нормалдык форма** деп дизъюнкциялык бир мүчөлөрдүн конъюнкциясы аталат, башкача айтканда, $D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_p$ түрүндөгү туюнтма, мында D_j – дизъюнкциялык бир мүчөлөр, $j = 1, 2, \dots, p$.

Аныктама. Көрсөтүлгөн туюнтмаларды $p = 1, q = 1$ болгон учурлар үчүн да дизъюнкциялык (конъюнкциялык) нормалдык форма деп атайбыз.

Аныктама. F формуласын туюнтуучу (б.а. F ке тең күчтүү) нормалдык форманы жөн гана бул формуланын нормалдык формасы деп атайбыз.

Ар кандай формула дизъюнкциялык сыяктуу, конъюнкциялык нормалдык формага ээ болот. Чынында эле каалагандай формуланы конъюнкция, дизъюнкция жана

тануу аркылуу туюнтууга болот. Ар бир формуланын чексиз көп сандагы дизъюнкциялык сыяктуу, конъюнкциялык нормалдык формалары табылат. Алардын айрымдары татаал, айрымдары жөнөкөй.

Мектептик алгебрага аналогиялуу төмөнкүлөрдү карайлы:

Мектептик алгебрада $ax, xuz, (a + b)uv$ (алардагы акыркы амал – көбөйтүү) типтеги туюнтмалар бир мүчөлөр деп аталышат, ал эми $a + b, ax + b, xu + uv + p$ (акыркы амал – кошуу) көп мүчөлөр деп аталышат.

Логикалар алгебрасында логикалык көбөйтүү (конъюнкция) жана логикалык кошуу (дизъюнкция) өздөрүнүн касиеттери боюнча тең укуктуу. Ошондуктан, $X \wedge Y, X \wedge Y \wedge Z$ типтеги туюнтмалар конъюнкциялык бир мүчөлөр деп аталышат, ал эми $X \vee Y, X \vee Y \vee Z$ типтеги туюнтмалар дизъюнкциялык бир мүчөлөр деп аталышат. $(X \wedge Y) \vee (P \wedge Q \wedge R), (P \vee Q) \wedge (X \vee Y \vee Z)$ бир мүчөлөрдөн түзүүлөр көп мүчөлөр эмес, нормалдык формалар деп аталышат.

Жетилген нормалдык формалар

Аныктама. Көптөгөн дизъюнкциялык (конъюнкциялык) нормалдык формалардын арасында уникалдуу форма табылат: берилген формула үчүн ал жалгыз. Ал болсо, жетилген дизъюнкциялык (конъюнкциялык) нормалдык форма деп аталат.

Аныктама. $X_1, X_2, \dots, X_n$ өзгөрүлмөлөрүнөн (дизъюнкциялык же конъюнкциялык) бир мүчө жетилген деп аталат, эгерде ага камтылган ар бир $X_i, \neg X_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) түгөйүнөн бир гана тамга камтылса.

Аныктама. $X_1, X_2, \dots, X_n$ өзгөрүлмөлөрүнөн (дизъюнкциялык же конъюнкциялык) нормалдык форма ошол өзгөрүлмөлөрдөн жетилген деп аталат, эгерде аларга

болгону $X_1, X_2, \dots, X_n$ ден (тиешелүү түрдө дизъюнкциялык гана, же конъюнкциялык гана) жетилген бир мүчөлөр камтылса.

X_1, X_2, X_3, X_4 төрт өзгөрүлмөдөн жетилген конъюнкциялык нормалдык формасына мисал келтирели:

$$(X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3 \vee X_4) \wedge (X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3 \vee X_4).$$

Төмөндө жетилген дизъюнкциялык нормалдык формаларга бир нече мисал келтирели:

$$\begin{aligned} & (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y), \\ & (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z), \\ & (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3 \wedge X_4) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3 \wedge X_4). \end{aligned}$$

Айтылыштар алгебрасынын формулаларын жетилген дизъюнкциялык нормалдык формалар аркылуу туюнтуу

Төмөнкүдөй белгилөөнү кийирели:

$$X^\alpha = \begin{cases} X, & \text{эгер } \alpha = 1, \\ \neg X, & \text{эгер } \alpha = 0. \end{cases}$$

$0^0 = 1, 0^1 = 0, 1^0 = 0, 1^1 = 1$, б.а. $X^\alpha = 1$ болот, качан гана $X = \alpha$; жана $X^\alpha = 0$ болот, качан гана $X \neq \alpha$.

Дагы бир белгилөө кийирели: $X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n$ дизъюнкциясынын ордуна $\bigvee_{i=1}^n X_i$ деп жазабыз.

Жекече учурда

$V_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} H(X_1, X_2, \dots, X_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — бул $X_1, X_2, \dots, X_n$ өзгөрүлмөлөрүнөн көз-каранды $H(X_1, X_2, \dots, X_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ мүмкүн болгон туюнтмалардын дизъюнкциясын түшүндүрөт, мында

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ суммалоо индекстери 0 жана 1 ден түзүлгөн n узундуктагы иреттелген мүмкүн болгон топтом. Мисалы:

$$\begin{aligned} & V_{(\alpha, \beta)}(X^\alpha \wedge Y^\beta) = \\ &= (X^0 \wedge Y^0) \vee (X^0 \wedge Y^1) \vee (X^1 \wedge Y^0) \vee \\ & \vee (X^1 \wedge Y^1) = \\ &= (\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y). \end{aligned}$$

**Айтылыштар алгебрасынын формулаларын жетилген
конъюнкциялык нормалдык формалар аркылуу
туюнтуу**

Бул пункттагы түшүнүктөр мурунку пункттагыга караганда кош мүнөзгө ээ.

Төмөнкүдөй белгилөө кийиребиз:

$${}^\beta X = \begin{cases} \neg X, & \text{эгер } \beta = 1, \\ X, & \text{эгер } \beta = 0. \end{cases}$$

${}^0 0 = 0, {}^1 0 = 1, {}^1 1 = 0, {}^0 1 = 0$, б.а. ${}^\beta X = 1$ болот, качан гана $X \neq \beta$; жана ${}^\beta X = 0$ болот, качан гана $X = \beta$.

Дагы бир белгилөө кийирели: $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n$ конъюнкциясынын ордуна $\bigwedge_{i=1}^n X_i$ деп жазабыз.

Жекече учурда

$\bigwedge_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} H(X_1, X_2, \dots, X_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – бул $X_1, X_2, \dots, X_n$ өзгөрүлмөлөрүнөн көз-каранды $H(X_1, X_2, \dots, X_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ мүмкүн болгон туюнтмалардын конъюнкциясын түшүндүрөт.

Мында $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ суммалоо индекстери 0 жана 1 ден түзүлгөн n узундуктагы иреттелген мүмкүн болгон топтом.

Мисалы:

$$\bigwedge_{(\alpha, \beta)} ({}^\alpha X \vee {}^\beta Y) =$$

$$= ({}^0X \vee {}^0Y) \wedge ({}^0X \vee {}^1Y) \wedge ({}^1X \vee {}^0Y) \wedge ({}^1X \vee {}^1Y) = (X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y).$$

Айтылыштар алгебрасынын формулаларын жетилген нормалдык формаларга келтирүүнүн эки ыкмасы

Бул 2 ыкма айтылыштардын алгебрасынын формулаларынын берилүү ыкмасынан турат: алардын маанилеринин таблицасынын жардамында же жазылыштын аналитикалык формасынын жардамында.

(КДН-форма – жетилген дизъюнкциялык нормалдык форма, ККН-форма – жетилген конъюнкциялык нормалдык форма)

Эгер формула өзүнүн маанилеринин таблицасы менен берилген болсо, анда КДН-формасы үчүн төмөнкүдөй түрдө болот:

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) \cong \bigvee_{F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (X_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge X_n^{\alpha_n}),$$

мында

$$X^\alpha = \begin{cases} X, & \text{эгер } \alpha = 1, \\ \neg X, & \text{эгер } \alpha = 0. \end{cases}$$

ККН-формасы үчүн төмөнкүдөй түрдө болот:

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) \cong \bigwedge_{F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} (X_1^{\beta_1} \vee \dots \vee X_n^{\beta_n})$$

мында

$${}^\beta X = \begin{cases} \neg X, & \text{эгер } \beta = 1, \\ X, & \text{эгер } \beta = 0. \end{cases}$$

Текшерүү үчүн суроолор:

Нормалдык форманын кандай түрлөрү бар? Алар эмнеси менен айырмаланышат?

Жетилген нормалдык форма деген эмне? КДНФ, ККНФ аркылуу айтылыштар алгебрасынын формулаларынын туюнтулушун мүнөздөгүлө.

Формулалардын логикалык натыйжасы

Логикалык натыйжа жана логикалык ой корутуу мыйзам-ченемдүүлүктөрүн изилдеген айтылыштар алгебрасынын бөлүмү анын өзөгүн түзөт. Дал ушул бөлүмдө, айтылыштардын формалдуу түзүлүшүн изилдөөнүн негизинде, башка айтылыштардын логикалык маанилерин орнотуунун жалпы жолдорун табуудан турган, логиканын өнүгүшүнүн ушул деңгээлинде логиканын негизги маселеси чечилет. Логиканын эң маанилүү максаттарынын бири – бул эмнеден келип чыгаарын аныктоо, башкача айтканда кайсы структуранын айтылыштары кайсы структуранын айтылыштарынан келип чыгаарын аныктоо (Норберт Винер айткандай, математиканын жалпы ордунун бир бөлүгү: бизди курчап турган башаламандыктардан тартипти табуу). Бул мыйзам-ченемдүүлүктөрдү билүү, биринчи кезекте, математика илиминин өзү үчүн зарыл. Мындай билимдердин жардамында математикалык теоремалар далилденип, натыйжада математиканын өнүгүшү ишке ашат. Бул билимдер башка илимдер үчүн да, жалпы эле илимий билимдерди системалаштыруу үчүн маанилүү болуп, күнүмдүк турмушта ой жүгүртүү, негиздөө жана далилдөө куралы катары кызмат кылат.

Логикалык натыйжа түшүнүгү

Бир же бир нече $A_1, A_2, \dots, A_n$ сүйлөмдөрдөн B сүйлөмү келип чыкса, анда төмөнкү орун алат: $A_1, A_2, \dots, A_n$ сүйлөмдөрүнүн баары чын болсо, анда B сүйлөмү да чын болот.

Мындай натыйжага мисалдар:

1. “Эгер мен жайында убактылуу жумушка орносом (A ырастоосу), анда менде айлык акы болот (B ырастоосу)”.
2. “Эгер менде айлык акы болсо (B ырастоосу), анда мен видеоманитофон сатып алам (C ырастоосу)”.

3. Эгер мен күндүз эртеңки сабактарга даярданбасам (A_1 ырастоосу), жана кечинде киного барсам (A_2 ырастоосу), анда мен эртеңки сабактарга даяр эмес болом (D ырастоосу).

Келтирилген талкуулардын чындыгын ырастоо математикалык логиканын компетенцияларын тиешелүү эмес, алардын мазмунунун жана маанисинин талданышынын негизинде ишке ашырылат.

Логикалык натыйжанын суроолорунда математикалык логиканын (айтылыштар алгебрасынын) милдети – акыркы айтылыш берилген айтылыштардын конкреттүү мазмунунан көз-каранды эместигине карабастан, n ырастоолордун түздөн-түз натыйжасы болуп саналгандыгы. Бизге белгилүү болгондой айтылыштардын формалары айтылыштар алгебрасынын формулалары аркылуу туюнтулат. Демек, логикалык натыйжа теориясы (айтылыштар алгебрасынын алкагында) $F_1, F_2, \dots, F_n, H$ формулаларын түзүү мыйзам-ченемдүүлүгүн окутат, алардын n алгачкылары логикалык натыйжа катышында акыркы менен байланышта болот.

Биринчи эки ырастоого кайрылалы:

$A \rightarrow B$ жана $B \rightarrow C$.

Буларга карата кийинки ой корутууну алууга болот:

“Эгер $A \rightarrow B$ жана $B \rightarrow C$, анда $A \rightarrow C$ ”.

Математикалык символиканы колдонбой, бул талкууну формулировкалоо жетишсиз. Ошондуктан аны формулировкалайлы:

“Эгер $A \rightarrow B$ айтылышы чын жана $B \rightarrow C$ айтылышы чын болсо, анда $A \rightarrow C$ чын”.

Бул ырастоо чын экендигине күмөн жок. Андан сырткары, биз анын чындыгын A, B, C жөнөкөй айтылыштарынын мазмунуна көңүл бурбай аныктоого болот.

Демек X, Z, Y айтылыштарынын кандай экендигинен көз-каранды эмес түрдө $X \rightarrow Z$ формасына ээ болгон айтылыш $X \rightarrow Y$ жана $Y \rightarrow Z$ формаларына ээ болгон айтылыштардан келип чыгат.

Эми логикалык натыйжа түшүнүгүнүн так аныктоосуна жана бул түшүнүктүн касиеттерин өздөштүрүүгө өтөлү.

Аныктама. Эгерде $G(X_1, \dots, X_n)$ формуласы конкреттүү айтылыштарга анын бардык $X_1, \dots, X_n$ пропозиционалдык өзгөрүлмөлөрүнүн ордуна койгондо, $F_1(X_1, \dots, X_n), \dots, F_m(X_1, \dots, X_n)$ бардык формулалар чын айтылышка айланса, анда $G(X_1, \dots, X_n)$ формуласы $F_1(X_1, \dots, X_n), \dots, F_m(X_1, \dots, X_n)$ формулаларынын логикалык натыйжасы деп аталат.

G формуласы $F_1, \dots, F_m$ формулаларынын логикалык натыйжасы болсо, анда ал $F_1, \dots, F_m \models G$ түрүндө жазылат. $F_1, \dots, F_m$ формулалары G логикалык натыйжасы үчүн негиз болуп саналат.

Ошентип, эгер $\lambda(F_1(A_1, A_2, \dots, A_n)), \dots, \lambda(F_m(A_1, A_2, \dots, A_n))$: каалагандай $A_1, A_2, \dots, A_n$ айтылыштары үчүн $\lambda(G(A_1, A_2, \dots, A_n))$ келип чыкса, $F_1, \dots, F_m \models G$ орун алат.

$F_1, \dots, F_m, G$ формулалары үчүн чындык таблицасын түзөлү. Эгер кайсы бир сапчада $F_1, \dots, F_m$ бардык формулалар 1 маанисин кабыл алса, анда ал сапчада сөзсүз G 1 маанисин кабыл алат. Бул болсо, $F_1, \dots, F_m$ формулаларынын логикалык натыйжасы G болуп саналаарын түшүндүрөт.

Формулировкаланган аныктамадан, логикалык натыйжадан формуланы текшерүүнүн так алгоритми келип чыгат. Үч өзгөрүлмөдөн көз-каранды үч формула-негиздерди карайлы:

$$F_1(X, Y, Z), F_2(X, Y, Z), F_3(X, Y, Z) \models G(X, Y, Z).$$

Бардык бул формулалар төмөнкү таблицада көрсөтүлгөн:

X	Y	Z	$F_1(X, Y, Z)$	$F_2(X, Y, Z)$	$F_3(X, Y, Z)$	$G(X, Y, Z)$
0	0	0	α_0	β_0	γ_0	ξ_0
0	0	1	α_1	β_1	γ_1	ξ_1
0	1	0	α_2	β_2	γ_2	ξ_2
0	1	1	α_3	β_3	γ_3	ξ_3
1	0	0	α_4	β_4	γ_4	ξ_4
1	0	1	α_5	β_5	γ_5	ξ_5
1	1	0	α_6	β_6	γ_6	ξ_6
1	1	1	α_7	β_7	γ_7	ξ_7

Алгоритм төмөнкүчө түрдө ишке ашат. Ал таблицанын удаалаш сапчалары боюнча F_1, F_2, F_3, G формулаларынын маанилеринин таблицасына сереп салат. Эгер $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ нөлүнчү сапчанын эч болбосо, бир элементи 0 го барабар болсо, анда бул сапчадагы G формуласынын мааниси (б.а. ξ_0 саны) каралбай туруп кийинки $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ сапчаны кароого өтөбүз. Эгер $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ нөлүнчү сапчанын бардык элементтери 1 ге барабар болсо, анда бул сапчадагы G формуласынын ξ_0 мааниси каралат. $\xi_0 = 0$ болсо, жыйынтык чыгат: G формуласы F_1, F_2, F_3 формулаларынын логикалык натыйжасы болуп саналбайт. $\xi_0 = 1$ болсо, кийинки $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ сапчасын кароого өтөбүз, жана башка ушул сыяктуу. Акыркы $\alpha_7, \beta_7, \gamma_7, \xi_7$ сапчасын карагандан кийин, андан кийинки сапчаны кароого өтүшүбүз керек

болот, бул логикалык натыйжанын аныкталышы аткарылган болоорун түшүндүрөт жана G формуласы F_1, F_2, F_3 формулаларынын логикалык натыйжасы болуп саналат.

Логикалык ой корутуу эрежелеринин мисалдары

1. *Ырастоочу модус (модус поненс):*

$$\frac{F, F \rightarrow G}{G}$$

Схема боюнча ой корутуунун мисалы:

1-негиз. Эгер төрт бурчтук квадрат болсо (F), анда анын диагоналдары өз ара перпендикулярдуу (G);

2-негиз. Бул төрт бурчтук - квадрат (F);

Корутунду. Демек, анын диагоналдары өз ара перпендикулярдуу (G).

2. *Тануучу модус (модус толленс):*

$$\frac{F \rightarrow G, \neg G}{\neg F}$$

Схема боюнча ой корутуунун мисалы:

1-негиз. Эгер фигура квадрат (F) болсо, анда анын бардык жактары барабар (G);

2-негиз. Бул фигуранын бардык жактары барабар эмес ($\neg G$);

Корутунду. Демек, бул фигура квадрат эмес ($\neg F$).

3. *Ырастатануучу модус:*

$$\frac{F \vee G, F}{\neg G}$$

Схема боюнча ой корутуунун мисалы:

Соттун чечими же жазалоочу (F) же актоочу (G).

Тиешелүү кылмыш иши боюнча соттун чечими жазалоочу (F).

Тиешелүү кылмыш иши боюнча соттун чечими актоочу эмес ($\neg G$)

4. **Танып-ырастоочу модус:**

$$\frac{F \vee G, \neg F}{G}$$

Схема боюнча ой корутуунун мисалы:

Соттун чечими же жазалоочу (F) же актоочу (G).

Тиешелүү кылмыш иши боюнча соттун чечими жазалоочу эмес ($\neg F$).

Тиешелүү кылмыш иши боюнча соттун чечими актоочу (G).

Дизъюнкциялык силлогизмдин кеңейтилген формасы

1. $\frac{F \vee G \vee H, F}{\neg G \wedge \neg H},$

2. $\frac{F \vee G \vee H, G}{\neg G \wedge \neg H},$

3. $\frac{F \vee G \vee H, H}{\neg F \wedge \neg G}$

Схема боюнча ой корутуунун мисалы:

1. Үч бурчтук же тар бурчтуу, же тик бурчтуу, же кең бурчтуу болушу мүмкүн.

$\triangle ABC$ – тар бурчтуу

$\triangle ABC$ – тик бурчтуу эмес жана кең бурчтуу эмес.

2. Үч бурчтук же тар бурчтуу, же тик бурчтуу, же кең бурчтуу болушу мүмкүн.

$\triangle ABC$ – тик бурчтуу

$\triangle ABC$ – тар бурчтуу эмес жана кең бурчтуу эмес.

3. Үч бурчтук же тар бурчтуу, же тик бурчтуу, же кең бурчтуу болушу мүмкүн.

$\triangle ABC$ – кең бурчтуу

$\triangle ABC$ – тар бурчтуу эмес жана тик бурчтуу эмес.

Дилеммалар

Жөнөкөй конструктивдик дилемма:

$$\frac{F_1 \rightarrow G, F_2 \rightarrow G, F_1 \vee F_2}{G}$$

Схема боюнча ой корутуунун мисалы:

Эгер төрт бурчтук ромб болсо (F_1), анда анын диагоналдары перпендикулярдуу (G).

Эгер төрт бурчтук квадрат болсо (F_2), анда анын диагоналдары перпендикулярдуу (G).

$ABCD$ төрт бурчтугу – же ромб же квадрат

$ABCD$ төрт бурчтугунун диагоналдары перпендикулярдуу.

Татаал конструктивдик дилемма:

$$\frac{F_1 \rightarrow G_1, F_2 \rightarrow G_2, F_1 \vee F_2}{G_1 \vee G_2}$$

Схема боюнча ой корутуунун мисалы:

Эгер төрт бурчтук параллелограмм болсо (F_1), анда анын диагоналдары кесилишүү чекитинде тең экиге бөлүнүшөт (G_1).

Эгер көп бурчтук тең жактуу төрт бурчтук болсо (F_2), анда анын диагоналдары барабар (G_2).

$ABCD$ төрт бурчтугу параллелограмм же көп бурчтук – тең жактуу төрт бурчтук

параллелограммдын диагоналдары кесилишүү чекитинде тең экиге бөлүнүшөт же тең жактуу төрт бурчтуктун диагоналдары барабар.

Жөнөкөй деструктивдик лемма

$$\frac{F \rightarrow G_1, F \rightarrow G_2, \neg G_1 \vee \neg G_2}{\neg F}$$

Схема боюнча ой корутуунун мисалы:

Эгер төрт бурчтук квадрат болсо (F), анда анын диагоналдары перпендикулярдуу (G_1).

Эгер төрт бурчтук квадрат болсо (F), анда анын диагоналдары барабар (G_2).

$ABCD$ төрт бурчтугунун диагоналдары – же перпендикулярдуу эмес же барабар эмес

$ABCD$ төрт бурчтугу – квадрат эмес.

Татаал деструктивдик лемма

$$\frac{F_1 \rightarrow G_1, F_2 \rightarrow G_2, \neg G_1 \vee \neg G_2}{\neg F_1 \vee \neg F_2}$$

Схема боюнча ой корутуунун мисалы:

Эгер төрт бурчтук параллелограмм болсо (F_1), анда анын диагоналдары кесилишүү чекитинде тең экиге бөлүнүшөт (G_1).

Эгер көп бурчтук тең капталдуу трапеция болсо (F_2), анда анын диагоналдары барабар (G_2).

$ABCD$ төрт бурчтугунун диагоналдары же кесилишүү чекитинде тең экиге бөлүнүшпөйт же тең капталдуу трапециянын диагоналдары барабар эмес

$ABCD$ төрт бурчтугу параллелограмм эмес, же көп бурчтук тең капталдуу трапеция эмес.

Конъюнкцияны жокко чыгаруу

$$\frac{F \wedge G}{F}$$

же

$$\frac{F \wedge G}{G}$$

Схема боюнча ой корутуунун мисалы:

$\frac{15 \text{ саны } 5\text{ке жана } 3 \text{ кө } 15 \text{ саны } 5\text{ке жана } 3 \text{ кө } \text{бөлүнөт}}{15 \text{ саны } 5 \text{ ке } \text{бөлүнөт}}$	$\frac{15 \text{ саны } 5\text{ке жана } 3 \text{ кө } 15 \text{ саны } 5\text{ке жана } 3 \text{ кө } \text{бөлүнөт}}{15 \text{ саны } 3\text{кө } \text{бөлүнөт}}$
--	--

Дизъюнкцияны кийирүү

$$\frac{F}{F \vee G}$$

же

$$\frac{G}{F \vee G}$$

төрт бурчтук – ромб

төрт бурчтук – ромб же
квадрат

төрт бурчтук – квадрат

төрт бурчтук – ромб же
квадрат

Эквиваленцияны кийирүү

$$\frac{F \rightarrow G, G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G}$$

Эгер түз сызык тегиздикке перпендикулярдуу болсо, анда ал ошол тегиздиктеги эки кесилишүүчү түз сызыктарга перпендикулярдуу.

Эгер түз сызык тегиздиктеги эки кесилишүүчү түз сызыктарга перпендикулярдуу болсо, анда ал ошол тегиздикке перпендикулярдуу

Түз сызык тегиздикке перпендикулярдуу болот, качан гана ал ошол тегиздиктеги эки кесилишүүчү түз сызыктарга перпендикулярдуу болсо.

Эквиваленцияны жокко чыгаруу

$$\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G}$$

же

$$\frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F}$$

ромб квадрат болот, качан гана анын диагоналдары барабар болсо

эгер ромб –квадрат болсо, анда анын диагоналдары барабар.

же

ромб квадрат болот, качан гана анын диагоналдары барабар болсо.

эгер ромбдун диагоналдары барабар болсо, анда ал квадрат болот.

Эки жолку танууну кийирүү

$$\frac{F}{\neg\neg F}$$

8 саны – жуп сан

8 саны так сан экендиги туура эмес

Эки жолку танууну жокко чыгаруу

$$\frac{\neg\neg F}{F}$$

вертикалдык бурчтар барабар эместиги туура эмес

вертикалдык бурчтар барабар.

Текшерүү үчүн суроолор:

Логикалык натыйжа деп эмнени түшүнөсүң?

Логикалык натыйжанын эки негизги касиетин атап, мисал келтирип бергиле.

Формулалардын тең күчтүүлүгү деген эмне жана ал логикалык системада кандай роль ойнойт?

Логикалык ой корутууда кайсы эрежелер колдонулат жана алардын мааниси эмнеде?

Логика-математикалык практикадагы айтылыштар алгебрасынын тиркемелери

Түз жана тескери теоремалар

Аныктама. Көптөгөн математикалык теоремалар $X \rightarrow Y$ формуласын туюнтуучу структурага ээ. X ырастоосу теореманын шарты, ал эми Y ырастоосу – анын корутундусу деп аталат.

Мисалдар:

1. “Эгер төрт бурчтуктун бардык жактары өз ара барабар болушса (A_1), анда анын диагоналдары перпендикулярдуу (B_1)”.

Бул теореманын символдук түрдө жазылышы: $A_1 \rightarrow B_1$.

2. “Эгер үч бурчтуктун бурчтарынын бири тик болсо (A_2), анда бул үч бурчтуктун бир жагынын узундугунун квадраты анын башка эки жагынын узундуктарынын квадраттарынын суммасына барабар (B_2)”.

Символдук түрдө: $A_2 \rightarrow B_2$.

Экинчи теоремага кылдат анализ андагы татаал структураны аныктоого мүмкүнчүлүк берет. A_2 шарты 3 ырастоонун дизъюнкциясын берет: $A_2' \vee A_2'' \vee A_2'''$, мында A_2' айтылышы “ $\alpha = 90^\circ$ ”, A_2'' айтылышы “ $\beta = 90^\circ$ ” жана A_2''' айтылышы “ $\gamma = 90^\circ$ ” (α, β, γ символдору үч бурчтуктун бурчтарынын чоңдуктарын түшүндүрөт).

Аналогиялуу түрдө B_2 дагы төмөнкүдөй үч ырастоонун дизъюнкциясын берет: $B_2' \vee B_2'' \vee B_2'''$, мында B_2' : $a^2 = b^2 + c^2$ айтылышы, B_2'' : $b^2 = a^2 + c^2$ айтылышы, B_2''' : $c^2 = a^2 + b^2$ айтылышы (a, b, c символдору аркылуу α, β, γ чоңдуктардагы бурчтардын каршысында жаткан үч бурчтуктун жагынын узундугу белгиленген).

Ошентип $A_2 \rightarrow B_2$ теоремасы

$$(A'_2 \vee A''_2 \vee A'''_2) \rightarrow (B'_2 \vee B''_2 \vee B'''_2)$$

түрүнө ээ болот.

Аныктама. Эгер кандайдыр бир теорема $X \rightarrow Y$ формасына ээ болсо, анда $Y \rightarrow X$ ырастоосу берилген теоремага тескери деп аталат.

Бул ырастоо туура болушу мүмкүн.

Эгер ал $X \rightarrow Y$ теоремасы үчүн тескери теорема деп аталса, бул болсо өз кезегинде түз теорема деп аталат.

Эгер $Y \rightarrow X$ ырастоосу орун албаса, анда $X \rightarrow Y$ теоремасы үчүн тескери теорема туура эмес.

$A_1 \rightarrow B_1$ теоремасынын структурасы жетишээрлик жөнөкөй. Татаалыраак структурадагы теореманы карайлы: “Барабар үч бурчтуктарда барабар бурчтардын каршысында барабар жактар жатат”. Бул теореманын шартын жана корутундусун так ажыратуу үчүн, аны төмөнкүчө формулировкалайбыз: “Эгер эки үч бурчтук барабар болушса (A) , анда бул үч бурчтуктардын бурчтарынын барабардыгынан (B) алардын карама-каршы жактарынын барабардыгы келип чыгат (C)”.

Теорема символдук түрдө төмөнкүчө жазылат:

$A \rightarrow (B \rightarrow C)$, башкача айтканда ал $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ формуласы мүнөздөлүүчү түзүлүшкө ээ. Тең күчтүүлүктүн негизинде берилген формула $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ жана $(P \wedge Q) \rightarrow R$ формулаларына тең күчтүүлүгү келип чыгат.

Натыйжада, $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ теоремасы (Эгер эки үч бурчтук барабар болсо (A), анда бул үч бурчтуктардын 2 бурчунун барабардыгынан (B) алардын карама-каршы жактарынын барабардыгы келип чыгат (C)) $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ түрүндө формулировкаланышы мүмкүн: “Эгер эки үч бурчтуктун эки бурчу барабар болсо (B) , анда ал үч бурчтуктардын барабардыгынан (A) ошол бурчтарга каршы

жаткан жактардын барабардыгы келип чыгат (C)”. Берилген теореманын 3-түрү $(A \wedge B) \rightarrow C$: “Эгер үч бурчтуктар барабар (A) жана алардын эки бурчу барабар болсо, анда ошол барабар бурчтарга карама-каршы жаткан жактар да барабар болот (C)”.

Ошентип, теореманын шарты A жана B ырастоолорунан турат же алардын конъюнкциясын берет, ал эми корутундусу C ырастоосу болот.

Эми каралган $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ теоремасына тескери теореманы түзгөнгө аракет кылалы. Бул учурда айтылыштар алгебрасы көмөктөшкөн. Берилген түз теоремада эки шарт, бир корутунду болгондуктан, анын тескери теоремасы бир нече болушат. Тескери теоремада түз теореманын шарты менен корутундусу алмашууга тийиш. Бул болсо, бир эмес, бир нече теорема алына тургандыгын түшүндүрөт. Берилген теореманын 3 формасы төмөнкүдөй тескери ырастоолорго келтирет

1) $(B \rightarrow C) \rightarrow A$: Эки үч бурчтуктун 2 бурчунун барабардыгынан (B), алардын карама-каршы жаткан жактары барабар болоору келип чыкса (C), анда берилген үч бурчтуктар барабар болушат (A);

2) $A \rightarrow (C \rightarrow B)$: Эгер эки үч бурчтук барабар болсо (A), анда бул үч бурчтуктардын тиешелүү бурчтарына карама-каршы жаткан жактарынын барабардыгынан (C), бурчтарынын барабардыгы келип чыгат (B);

3) $B \rightarrow (A \rightarrow C)$: Эки үч бурчтуктун 2 бурчунун барабардыгынан (B), берилген үч бурчтуктар барабар болушса (A), алардын тиешелүү бурчтарына карама-каршы жаткан жактары барабар боло тургандыгы келип чыгат (C);

4) $C \rightarrow (A \wedge B)$: “Эки үч бурчтуктун тиешелүү бурчтарына карама-каршы жаткан жактары барабар болсо (C), анда бул үч бурчтуктар жана алардын тиешелүү бурчтары барабар болушат (B)”.

Зарыл жана жетиштүү шарттар

Түз жана тескери теоремалар түшүнүктөрү зарыл жана жетиштүү шарттар жөнүндө суроо менен байланышкан.

Эгер кандайдыр бир математикалык теорема $X \rightarrow Y$ структурасына ээ болсо, анда Y айтылышы X айтылышы үчүн зарыл шарт болуп саналат, ал эми X айтылышы Y айтылышы үчүн жетиштүү айтылыш деп аталат.

$A_1 \rightarrow B_1$: Эгер төрт бурчтуктун бардык жактары өз ара барабар болсо (A_1), анда анын диагоналдары перпендикулярдуу (B_1). Мында төрт бурчтуктун бардык жактарынын барабардыгынын зарыл шарты болуп, анын диагоналдарынын перпендикулярдуулугу эсептелет. Төрт бурчтуктун диагоналдарынын перпендикулярдуулугу үчүн жетиштүү шарт болуп, анын диагоналдарынын перпендикулярдуулугу эсептелет.

Томпок төрт бурчтук квадрат (A) болуп саналышынын зарыл жана жетиштүү шартын табуу талап кылынсын. Бул ырастоо үчүн зарыл шарттарды табалы:

B_1 : “Төрт бурчтуктун диагоналдары перпендикулярдуу”;

B_2 : “Төрт бурчтуктун диагоналдары барабар”;

B_3 : “Төрт бурчтуктун диагоналдары кесилишүү чекитинде тең экиге бөлүнөт”.

$A \rightarrow B_1$, $A \rightarrow B_2$, $A \rightarrow B_3$ ырастоолорунун ар бири туура. Тескери ырастоолорду анализдейли. Албетте, төмөнкүлөр туура эмес:

Ырастоо	Контрмисал
$B_1 \rightarrow A$	Квадрат болбогон ромб
$B_2 \rightarrow A$	Квадрат болбогон тик бурчтук
$B_3 \rightarrow A$	Параллелограмм

Математикалык теоремалардын структурасын модификациялоо

Математикалык теоремалардын структурасын, алардын логикасын бузбай модификациялоого жардам берүүчү бир нече тең күчтүүлүктөрдү келтирели.

$$1) \quad X \rightarrow (Y \wedge Z) \cong (X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z);$$

$$X \rightarrow (Y \wedge Z \wedge V) \cong (X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z) \wedge (X \rightarrow V);$$

$$2) \quad (X \vee Y) \rightarrow Z \cong (X \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow Z);$$

$$(X \vee Y \vee Z) \rightarrow V \cong (X \rightarrow V) \wedge (Y \rightarrow V) \wedge (Z \rightarrow V);;$$

$$3) \quad (X \wedge Y) \rightarrow Z \cong (X \wedge \neg Z) \rightarrow \neg Y;$$

$$4) \quad (X \wedge Y) \rightarrow Z \cong (X \wedge Z) \vee (Y \rightarrow Z).$$

X: Төрт бурчтук – тик бурчтук;

Y: Төрт бурчтук – ромб;

Z: Төрт бурчтук – квадрат.

Текшерүү үчүн суроолор:

Түз жана тескери теореманын айырмасын мисал менен түшүндүрүп бергиле.

Зарыл жана жетиштүү шарттардын айырмачылыгы эмнеде жана аларды кантип ажыратууга болот?

Карама-каршы жана карама-каршыга тескери теоремалардын ортосундагы байланыш кандай?

Математикалык теореманын түзүлүшүн өзгөртүү кайсы учурларда колдонулат жана мааниси эмнеде?

Бульдук функциялар жана алардын колдонулушу

Бульдук функциялар теориясы математикалык колдонмо маанидеги маселелерди (тилде туюнтулуучу ой жүгүртүүнүн математикалык колдонулушун түзүүдөн баштаганбыз) чыгаруудан баштап, абстракцияга өтүп, өзүнүн ички закондоруна ылайык өнүгүүнү баштаган ойду түшүндүрөт. Бирок ушул эле теория дагы таасирлентүүчү жана маанилүү мисалды берет: өзүнүн абстракттуу касиетинде жеткиликтүү деңгээлге чейин өсүп жатып, бул теория практикалык жашоодо математиканын башка бөлүмдөрү анын көп кылымдык өнүгүү тарыхында бербеген эбегейсиз эффективдүү колдонулуштарды тапты. Ал колдонулуштар конструкциялоо, XX, XXI кылымдарда адам баласынын түп тамыры менен жашоосун өзгөртүп түзгөн электрондук-эсептөө машиналарды (компьютерлерди) жаратуу менен байланышкан.

Математиканын түрдүү областтары ар түрдүүчө функциялар менен иш алып барышат. Алар математикалык анализ курсунда өздөштүрүлүүчү чыныгы аргументтүү чыныгы функциялар, комплекстик өзгөрүлмөлүү функциялар теориясынан белгилүү болгон комплекстик аргументтүү комплекстик функциялар, дифференциалдык геометрияда маанилүү роль ойногон скалярдык аргументтүү вектор-функциялар, вектордук аргументтүү скалярдык функциялар (мисалы, векторлордун скалярдык жана аралаш көбөйтүндүлөрү), натуралдык сандардын көптүгүндө берилген жана кабыл алуучу функциялар (мисалы, сандар теориясындагы Эйлердин функциясы) ж.б. болушу мүмкүн.

Биз силер менен функциялардын дагы бир түрү болгон бульдук функциялар менен таанышабыз. Алар логикалык маселелерде математикалык ордуна коюуларда пайда болушту. Аларды логикалар алгебрасынын функциялары деп да аташат. Алар мындай аталышты логикада математикалык

методдорду биринчи колдонгон англиялык математик Джордж Бульдун (1815-1864) атынан алган.

Бульдук функциялардын пайда болушу. Башында биз айтылыштардын тануусу, конъюнкциясы, дизъюнкциясы, импликациясы, эквиваленциясы операцияларын аныктоодо 0 жана 1 символдорунун үстүнөн кандайдыр бир амалды же $\{0,1\}$ – 2 элементтүү көптүктө берилген кандайдыр бир функцияны аныктоо катары караганбыз. 0 символу аркылуу жалган айтылыш, ал эми 1 символу аркылуу чын айтылыш белгиленген.

Мисалы: тануу $f_2(x)$ бир аргументтүү функцияны түшүндүрүү менен

$$f_2(0) = 1,$$

$$f_2(1) = 0$$

маанилерди кабыл алат.

Конъюнкция болсо, $g_1(x,y)$ эки аргументтүү функцияны түшүндүрүү менен

$$g_1(0,0) = 0,$$

$$g_1(0,1) = 0,$$

$$g_1(1,0) = 0,$$

$$g_1(1,1) = 1$$

маанилерди кабыл алат.

Айтылыштар алгебрасында пайда болгон эки элементтүү көптүктө берилген жана кабыл алынган функциялар логикалык алгебранын функциялары же бульдук функциялар деп аталышат.

Бульдук функциялар түшүнүгүн кийирүү менен, биз айтылыштар алгебрасында айтылган мазмундан алыстайбыз, бизде 0 жана 1 символдору жана бульдук функциялар түшүнүгү гана калат.

$\{0,1\}$ көптүгүндө аныкталган өзгөрүлмөлөрдү латын алфавитинин кичине тамгалары:

$$x, y, z, u, v, \dots, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

аркылуу белгилейбиз жана бульдук деп атайбыз.

Бир жана эки аргументтүү бульдук функциялар

$f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ чагылуусу бир аргументтүү бульдук функция. Бир аргументтүү бардык функцияларды (алар төртөө) атап чыгуу кыйын эмес:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Ошентип:

$$f_0(x) = 0 \text{ (теңдеш нөл);}$$

$$f_1(x) = x \text{ (теңдеш функция);}$$

$$f_2(x) = x' \text{ (тануу же инверсия);}$$

$$f_3(x) = 1 \text{ (теңдеш 1).}$$

Эки аргументтүү бульдук функция – 0 жана 1 элементтеринен (мындай иреттелген түгөйлөр төртөө), же 0, же 1 түгөйлөргө туура келүүчү

$$g: \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\} \text{ чагылуусу.}$$

Эки аргументтүү мүмкүн болгон бульдук функцияларды төмөнкү таблицада көрсөтөлү:

			0	.	$\rightarrow'$	x	$\leftarrow'$
x	y		g_0	g_1	g_2	g_3	g_4
0	0		0	0	0	0	0
0	1		0	0	0	0	1
1	0		0	0	1	1	0
1	1		0	1	0	1	0

			y	+	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$
x	y		g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
0	0		0	0	0	1	1
0	1		1	1	1	0	0
1	0		0	1	1	0	0
1	1		1	0	1	0	1

			y'	$\leftarrow$	x'	$\rightarrow$		1
x	y		g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0		1	1	1	1	1	1
0	1		0	0	1	1	1	1
1	0		1	1	0	0	1	1
1	1		0	1	0	1	0	1

функциялардын номерлерин байкасак, экилик эсептөө системасында жазылган функциялардын номерлери тиешелүү функциянын маанисинин удаалаштыгын берет. Мисалы, 13 санынын экилик эсептөөдөгү жазылышы 1101 түрүндө.

$g_{13}(x, y)$ төмөнкү маанилерди кабыл алат:

$$g_{13}(0,0) = 1,$$

$$g_{13}(0,1) = 1,$$

$$g_{13}(1,0) = 0,$$

$$g_{13}(1,1) = 1.$$

Көпчүлүк функциялар аталыштарга жана атайын белгилерге ээ.

Биринчи 2 функция:

$g_0(x, y) = 0$ жана $g_{15}(x, y) = 1$ – теңдеш нөл жана теңдеш бирдик.

$g_1(x, y)$ функциясы конъюнкция же логикалык көбөйтүндү деп аталып, $x \cdot y$ же xy аркылуу белгиленет. Ошентип,

$$g_1(x, y) = x \cdot y.$$

Качан гана эки аргумент тең 1 маанисин кабыл алганда, конъюнкция 1 маанисин кабыл алат.

Конъюнкциянын тануусу $g_{14}(x, y)$ функциясы Шеффердин штрихи деп аталат жана $x|y$ аркылуу белгиленет. Ошентип,

$$g_{14}(x, y) = (x \cdot y)' = x|y.$$

Бул функция 0 маанисин кабыл алат, качан гана $g_1(x, y)$ функциясы 1 маанисин кабыл алганда, башкача айтканда анын эки аргументи тең 1 маанисин кабыл алганда.

$g_7(x, y)$ функциясы дизъюнкция же логикалык кошуу деп аталат жана $x \vee y$ аркылуу белгиленет. Ошентип

$$g_7(x, y) = x \vee y.$$

$g_8(x, y)$ функциясынын тануусу болуп эсептелген $g_8(x, y)$ функциясы атуучу Пирстин же Веббдин функциясы аталышына ээ жана

$$g_8(x, y) = x \downarrow y$$

деп белгиленет.

$g_{13}(x, y)$ функциясы импликация деп аталат жана $x \rightarrow y$ аркылуу белгиленет, башкача айтканда

$$g_{13}(x, y) = x \rightarrow y.$$

Бул функциядагы x аргументи импликациянын антецеденти же негизи деп аталат, ал эми y аргументи анын натыйжасы же консеквенти деп аталат. Импликациянын тануусу

$$g_2(x, y) = (x \rightarrow y)'$$

функциясы. Анын атайын аталышы жок.

$g_{11}(x, y)$ функциясы антиимпликация же тескери импликация деп аталат, анткени y негизин жана x импликациясын берет. Ошентип,

$$g_{11}(x, y) = y \rightarrow x.$$

Анын тануусу аталышка ээ болбогон

$$g_4(x, y) = (y \rightarrow x)'$$

функциясы.

$g_9(x, y)$ функциясы эквиваленттүүлүк деп аталат жана $y \leftrightarrow x$ аркылуу белгиленет, себеби

$$g_9(x, y) = y \leftrightarrow x.$$

Ал 1 маанисин кабыл алат, качан гана аргументтердин ар бир бирдей маанини кабыл алганда. $g_9(x, y)$ функциясынын

тануусу болгон $g_6(x, y)$ функциясы 2 модулу боюнча кошуу же Жегилкиндин суммасы деп аталат жана $x + y$ аркылуу белгиленет.

Акыркы функциялар: $g_3(x, y)$ жана $g_{12}(x, y)$ функциялары. Алардын биринчиси биринчи аргумент кандай болсо, ошону кабыл алган $g_3(x, y) = x$, ал эми экинчиси $g_{12}(x, y) = x'$, б.а. анын тануусу. Ошондой эле $g_5(x, y)$ жана $g_{10}(x, y)$ функциялары. Алардын биринчиси экинчи аргумент кандай маанини кабыл алса, ошону кабыл алат, башкача айтканда $g_5(x, y) = y$, ал эми экинчиси биринчинин тануусу болуп саналат:

$$g_{10}(x, y) = y'.$$

Киргизилген жөнөкөй бульдук функциялардан суперпозициянын жардамында татаалыраак бульдук функцияларды кийирүүгө болот, мисалы: $x \vee t$ функциясында t аргументинин ордуна $y \cdot z$ функциясын кийирсек, анда татаалыраак $x \vee (y \cdot z)$ функциясын алабыз. Эгер z аргументинин ордуна $u \rightarrow v$ функциясын кийирсек, анда $x \vee (y \cdot (u \rightarrow v))$ функциясын алабыз ж.б.

Бульдук функциялардын биринин экинчиси аркылуу туюнтулушу:

- а. $x \cdot y = (x' \vee y')'$;
- б. $x \vee y = (x' \cdot y')'$;
- в. $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$;
- г. $x \vee y = x' \rightarrow y$;
- д. $x \rightarrow y = x' \vee y$;
- е. $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \cdot (y \rightarrow x)$;
- ж. $x' = x|x$;
- з. $x|y = (x \rightarrow y)'$;
- и. $x \vee y = x'|y' = (x|x)|(y|y)$;

$$\text{к.} \quad y' = x \downarrow x;$$

$$\text{л.} \quad x \downarrow y = (x \vee y)';$$

$$\text{м.} \quad x \cdot y = x' \downarrow y' = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$$

Аныктама. $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, мында $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\forall i = \overline{1, \dots, n}$ бульдук же экилик вектор деп аталат.

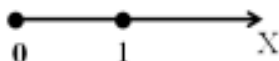
α_i элементтери анын компоненттери же координаталары деп аталат.

n саны $\bar{\alpha}$ узундугу деп аталат.

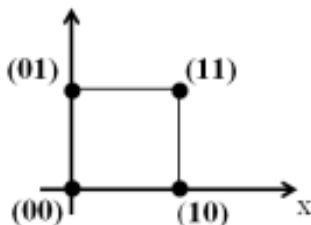
Аныктама. n узундуктагы бардык экилик векторлордун көптүгү n ченемдүү бульдук кубду түзөт. Ал $\mathbb{B}^n$ түрүндө белгиленет.

1-мисал. $n = 1, 2, 3$ үчүн $\mathbb{B}^n$ ди графикалык сүрөттөгүлө.

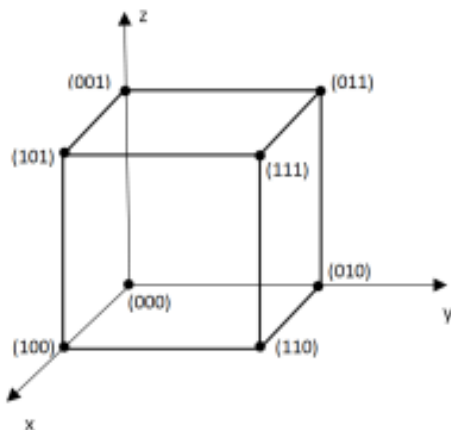
$n = 1$: $\mathbb{B}^1 = \{(0), (1)\}$ – эки компоненттен турат, алардын ар бирин OX огунда сүрөттөөгө болот.



$n = 2$: $\mathbb{B}^2 = \{(00), (01), (10), (11)\}$ – 4 компонентадан турушат, алардын ар бирин XOY тегиздигинин чекиттери аркылуу туюнтууга болот, алар бирдик квадраттын тиешелүү координатадагы чокулары болуп саналышат.



$n = 3$: $\mathbb{B}^3 = \{(000), (001), (010), (011), (100), (101), (110), (111)\}$ – 8 компонентадан турушат, алардын ар бирин $OXYZ$ мейкиндигинин чекиттери аркылуу туюнтууга болот, алар бирдик кубдун тиешелүү координатадагы чокулары болуп саналышат.



Эскертүү: n узундуктагы түрдүү экилик векторлордун саны 2^n барабар:

$$N(\mathbb{B}^n) = 2^n.$$

Далилдөө: n узундуктагы $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ экилик же бульдук векторун карайлы. Ар бир компонент же 0 же 1дин мүмкүн болгон маанилерин кабыл алгандыктан, экилик топтомдо ар биринин n позициясын толтуруу үчүн 2 вариант бар. Ошентип, бардык мүмкүн болгон варианттар:

$$N(\mathbb{B}^n) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ жолу}} = 2^n.$$

Аныктама. Ар бир $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ экилик векторго өз ара бир маанилүү $P(\vec{\alpha})$ терс эмес бүтүн санды тиешелеш коюуга болот:

$$P(\bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot 2^{n-i}$$

жана аны экилик вектордун номери деп атайбыз.

$$0 \leq P(\bar{\alpha}) \leq 2^n - 1.$$

Мисалы, үч өзгөрүлмөлүү топтом үчүн номерлер төмөнкүдөй болушат:

$$P(000) = 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 0$$

$$P(001) = 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1$$

$$P(010) = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$$

$$P(011) = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$$

$$P(100) = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4$$

$$P(101) = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$$

$$P(110) = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6$$

$$P(111) = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 7$$

Бирдей узундуктагы экилик топтомдордун алардын номерлеринин өсүү тартиби боюнча жайгашуусу топтомдордун стандарттуу же лексикографикалык жайгашуусу деп аталат.

Аныктама. Аныкталуу областы $(\mathbb{B}^n)$ n ченемдүү бульдук куб, ал эми маанилеринин областы $\mathbb{B} = \{0,1\}$ көптүгү болгон $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы бульдук функциялар же логикалар алгебрасынын функциясы деп аталат.

n өзгөрүлмөдөн көз-каранды болгон бардык бульдук функциялардын көптүгүн $P_2(n)$ деп белгилөө кабыл алынган.

Бульдук функциялардын берилиш жолдору

1. Таблицалык жол менен берилиши (чындык таблицасы)

Каалагандай $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ бульдук функциясын эки мамычадан туруучу таблица түрүндө сүрөттөөгө болот:

- анын биринчи мамычасында лексикографикалык тартипте n узундуктагы бардык экилик топтомдор жайгашкан (баары 2^n сапча);
- экинчи мамычанын ар бир сапчасында ошол топтомдо функциянын кабыл алган маанилери жазылган.

$x_1, x_2, \dots, x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
00...00	$f(00...00)$
00...01	$f(00...01)$
00...10	$f(00...10)$
...	...
11...01	$f(11...01)$
11...10	$f(11...10)$
11...11	$f(11...11)$

2-Мисал. Эки өзгөрүлмөлүү функциянын таблицалык жол менен берилиши:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
00	0

01	0
10	1
11	1

Биринчи мамычадагы топтомдор номерлердин өсүү тартибинде жайгашкан:

$$P(00) = 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 0$$

$$P(01) = 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1$$

$$P(10) = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$$

$$P(11) = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$$

Экинчи мамычада тиешелүү топтомдордо функциянын кабыл алган маанилери жайгашкан:

$$f(00) = 0$$

$$f(01) = 1$$

$$f(10) = 1$$

$$f(11) = 1$$

2. Бульдук функциянын вектордук жол менен берилиши.

n өзгөрүлмөлүү түрдүү функциялардын чындык таблицасында биринчи мамыча бирдей болгондуктан, анда чындык таблицасынын экинчи мамычасына туура келген векторду бир маанилүү аныктоого болот:

$$\bar{f} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$$

α_i координатасы i номерлүү топтомдогу функциянын маанисине барабар.

3-мисал.

2-мисалдагы функциянын маанилеринин вектору төмөнкүгө барабар:

$$\bar{f} = (0011)$$

$$2\text{-эскертүү. } |P_2(n)| = 2^{2^n}.$$

Далилдөө: n өзгөрүлмөлүү функциянын маанилеринин

$$\bar{f} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$$

вектору 2^n координатага ээ (алардын ар бири же 0 же 1 мүмкүн болгон маанилер) болгондуктан, алар 2^n узундуктагы түрдүү топтомдордун саны 2^{2^n} га барабар болот.

Демек түрдүү n өзгөрүлмөлүү бульдук функциялардын саны да 2^{2^n} га барабар болот, анткени бульдук функция менен анын маанилеринин векторунун ортосунда өз ара бир маанилүү тиешелештик бар.

Текшерүү үчүн суроолор:

Бульдук функциялар кандай тарыхый шарттарда пайда болгон жана анын математикадагы орду кандай?

Бир жана эки аргументтүү Бульдук функциялардын айырмачылыктарын атап бергиле.

Бульдук функциялар менен айтылыштар алгебрасынын формулаларынын ортосунда кандай байланыш бар?

Бульдук функциялар кайсы тармактарда колдонулат жана орду кандай?

Аксиомалардын системасы жана формалдуу тыянак теориясы

Айтылыштардын аксиоматикалык теориясынын башталышы: баштапкы түшүнүктөр, аксиомалардын системасы, тыянак чыгаруу эрежеси. Эң алгачкы, аксиоматикалык теориясынын аныктамасыз кабыл алынган түшүнүктөрүнө төмөнкүлөр кирет:

$X_1, X_2, \dots, X_n$ *пропозиционалдык өзгөрүлмөлөр*;

$\neg, \rightarrow, -$ – логикалык байланыштар;

$(,)$ – техникалык белгилер.

Баштапкы түшүнүк болуп, төмөнкүдөй индуктивдик жол менен аныкталган формула түшүнүгү эсептелет:

1. Ар бир пропозиционалдык өзгөрүлмө формула болот;

2. Эгер F_1, F_2 – формулалар болушса, анда $\neg F_1$, $F_1 \rightarrow F_2$ туюнтмалары да формула болуп саналышат.

3. 1 жана 2 пункттарга ылайык, алынган формулалардан башка формула жок.

Айтылыштардын аксиоматикалык теориясын түзүүнүн кийинки кадамы аксиомалар системасын тандоодо турат. Аксиома катары төмөнкүдөй түрдөгү формулалар тандалат:

$$(A1) F \rightarrow (G \rightarrow F),$$

$$(A2) (F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow (F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H),$$

$$(A3) (\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow ((\neg G \rightarrow F) \rightarrow G).$$

мында F, G, H – каалагандай формулалар. Ошентип, (A1), (A2), (A3) туюнтмаларынын ар бири аксиоманын формасын гана берет. Качан гана F, G, H тын (пропозиционалдык өзгөрүлмөлөрдүн) ордуна аксиомаларды койгондо, алар аксиомага айланат. Натыйжада, бул туюнтмалардын ар бири

чексиз көп формулаларды берет. Алардын баары аксиомалар деп аталышат. Ошондуктан $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$ туюнтмаларынын ар бири аксиоманын схемасы деп аталышат.

Айтылыштардын аксиоматикалык теориясын түзүүчү акыркы кадам болуп, тыянак чыгаруу эрежесин тандоодон турат.

Тыянак чыгаруунун жалгыз эрежеси болуп корутунду (же модус поненс же кыскача МП) эрежеси кызмат кылат:

F жана $F \rightarrow G$ формулаларынан G формуласы келип чыгат.

Айтылыштар алгебрасында формулаларга тышкы кашааларды койбоону макулдашалы.

Аксиомаларда $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ байланыштары катышпайт, ошондуктан аларды аныктоого туура келет. Төмөнкүдөй аныктамаларды кийирели.

$(F \wedge G)$ формуласы $\neg(F \rightarrow \neg G)$ формуласын түшүндүрөт,

$(F \vee G)$ формуласы $(\neg F \rightarrow G)$ формуласын түшүндүрөт,

$(F \leftrightarrow G)$ формуласы $((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$ формуласын түшүндүрөт.

Биринчи аныктаманын мааниси F жана G формулалары кандай гана болбосун, $(F \wedge G)$ формуласы $\neg(F \rightarrow \neg G)$ формуласы үчүн белгилөө катары кызмат кылат.

Тыянак түшүнүгү жана анын касиеттери

Алгач, далилдөө жана теорема түшүнүктөрүн тактайлы.

Аныктама 1. Γ формулалардын көптүгүндө Γ формуласын далилдөө же тыянак чыгаруу деп, же аксиома формула болуп эсептелген ар бир $B_1, B_2, \dots, B_s$ формулалардын чектүү удаалаштыгы, же Γ дан алынган

формула болуп эсептелген же МП эрежеси боюнча удаалаштыктын биринчи 2 формуласынан алынган, акыркы B_s формуласы F менен дал келген $B_s \equiv F$ формулалар аталат. Эгер Γ көптүгүнөн F формуласы үчүн тыянак формуласына ээ болсо, анда Γ дан F келтирилүүчү, же Γ ти келтирип чыгаруучу деп атайбыз, жана $\Gamma \vdash F$ деп жазылат. Γ дан алынган элементтер божомолдор же тыянактын негизи деп аталат. Эгер божомолдордун бош көптүгүнөн Γ формуласы келтирилип чыгарылса, анда F аксиомалардан келтирилүүчү же F далилденүүчү, ал эми $B_1, B_2, \dots, B_s$ бул формуланын далилдениши деп аталат. F тин өзүн теорема деп атайбыз жана $\vdash F$ түрүндө белгилейбиз. Ошентип, $\vdash F$ жазуусу “ F – бул теорема ” ырастоосунун кыскача жазылышы катары кызмат кылат.

Эгер Γ көптүгү чектүү болсо: $\Gamma = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$, анда $\{F_1, F_2, \dots, F_m\} \vdash G$ жазуусунун ордуна $F_1, F_2, \dots, F_m \vdash G$ деп жазабыз.

Аксиомалардын, тыянак чыгаруу эрежелеринин жана аксиомадан келип чыгуучу бардык теоремалардын жыйындысы айтылыштардын аксиоматикалык теориясын же айтылыштардын формалдаштырылган эсептөөсүн берет.

Кандайдыр бир теореманын далилдөөсүнө мисал карайлы.

1-мисал. $\vdash F \rightarrow F$ экендигин далилдейли.

$F \rightarrow F$ формуласынын айтылыштардын формалдаштырылган эсептөөсүнүн теоремасы болушун далилдөө үчүн, бул формуланын аксиомадан келип чыгышын түзүү керек. Мындай тыянак болуп, төмөнкү формулалардын удаалаштыгы эсептелет:

- (1) $(F \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F)) \rightarrow ((F \rightarrow (F \rightarrow F)) \rightarrow (F \rightarrow F))$,
- (2) $F \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F)$,

$$(3) (F \rightarrow (F \rightarrow F)) \rightarrow (F \rightarrow F),$$

$$(4) F \rightarrow (F \rightarrow F),$$

$$(5) F \rightarrow F.$$

Чечмелеп көрөлү:

(1) формула (A2) аксиомасын түшүндүрөт, мында F жана G формулалары катары F формуласы, ал эми G формуласы катары $F \rightarrow F$ алынган.

(2) формула (A1) аксиомасын түшүндүрөт, мында G формуласы катары $F \rightarrow F$ алынган.

(3) формула (1) жана (2) формулалардан МП эрежеси боюнча алынган.

(4) формула (A1) аксиомасы.

Жыйынтыгында, (5) формула (3) жана (4) формулалардан МП эрежеси боюнча алынды.

Ошентип, $\vdash F \rightarrow F$.

Кийинки теоремада бир нече жөнөкөй, бирок божомолдордон келтирилип чыгуучулук түшүнүгүнүн негизги касиеттери белгиленген.

Теорема 1. (келтирилип чыгуучулук касиети)

а) Эгер $\Gamma \vdash F$ жана $\Gamma \subseteq \Delta$, анда $\Delta \vdash F$;

б) Качан гана Γ да $\Delta \vdash F$ боло тургандай Δ чектүү камтылган көптүгү жашаса, анда $\Gamma \vdash F$ болот;

в) Эгер Δ көптүгүнөн алынган G формуласы үчүн $\Gamma \vdash G$ жана $\Delta \vdash F$ болсо, анда $\Gamma \vdash F$ болот.

Далилдөө. а) Берилген касиет төмөнкү фактыны туюнтат: эгер F формуласы Γ негиздеринин көптүгүнөн келип чыкса, анда ал Γ га жаңы негиздерди кошуудан алынуучу каалаган көптүктөн келтирилип чыгат.

б) Жетиштүүлүк (а)дан келип чыгат. Тескерисинче, эгер $\Gamma \vdash F$ болсо, анда тыянак же далилдөөнүн аныктамасына ылайык, Γ дан F корутундусу келип чыгат, башкача айтканда айрым формулалардын чектүү сандагы формулалар колдонулуучу, жыйынтыгында, Γ дан чектүү сандагы гана негиздер алынат. Ошондуктан Γ дан алынган формулалардын чектүү бөлүгү F формуласын келтирип чыгарат.

Дедукция жөнүндө теорема жана анын натыйжалары

Далилдөөлөрдү түзүү процесси бул же тигил формулалар үчүн идеялык сыяктуу эле, техникалык планда да бир кыйла оор. Дедукция жөнүндө теорема мындай түзүүлөрдөгү жалпы мыйзам-ченемдүүлүктү аныктайт жана далилдөөнү жүргүзүү процессин жеңилдетет.

Теорема 2. (дедукция жөнүндө)

Эгер $F_1, \dots, F_{m-1}, F_m \vdash G$, анда $F_1, \dots, F_{m-1} \vdash F_m \rightarrow G$. Жеке учурда, эгер $F \vdash G$, анда $\vdash F \rightarrow G$.

Далилдөө. $F_1, \dots, F_{m-1}, F_m$ божомолдорунун G корутундусу болуп эсептелген

$$B_1, B_2, \dots, B_i, B_s \quad (1)$$

формулалардын удаалаштыгы болсун дейли. Төмөнкү формулалардын удаалашыгын карайлы:

$$F_m \rightarrow B_1, F_m \rightarrow B_2, \dots, F_m \rightarrow B_i, \dots, F_m \rightarrow B_s \quad (2)$$

Бул удаалаштыкта акыркы ордунда $F_m \rightarrow G$ турат (себеби $B_s \equiv G$). Бул удаалаштык $F_1, \dots, F_{m-1}$ божомолдорунун корутундусу болуп саналбайт. Ошого карабастан, эгерде удаалаштыктагы ар бир формуланын алдына тиешелүү формулаларды кошсок (же бириктирсек), анда ошондой корутундуга айландырууга мүмкүн болот. Ал үчүн l боюнча

$$F_1, \dots, F_{m-1}, F_m \rightarrow B_l \quad (3)$$

болгондой математикалык индукция методун көрсөтөбүз:

1) $l = 1$ болсун, $F_1, \dots, F_{m-1}, F_m \rightarrow B_1$ боло тургандыгын көрсөтөбүз. B_1 формуласы үчүн $F_1, \dots, F_{m-1}, F_m$ ден алынган G нын корутундусу болуп саналган (1) удаалаштыктын биринчи мүчөсү үчүн төмөнкүдөй мүмкүнчүлүктөр туюнтулушу мүмкүн:

A) B_1 – же аксиомалардын бири, же $F_1, \dots, F_{m-1}$ божомолдордун бири. Бул учурда $F_1, \dots, F_{m-1}$ божомолдорунан $F_m \rightarrow B_1$ формуласынын корутундусу

$$B_1, B_1 \rightarrow (F_m \rightarrow B_1), F_m \rightarrow B_1 \quad (4)$$

Мындагы экинчи формула (A1) аксиомасы, ал эми үчүнчү МП эрежеси боюнча биринчи экөөнөн алынды. Ошентип, биринчи формуланын алдындагы (2) удаалаштыкка (4) удаалаштыктан биринчи жана экинчи формуланы кошуу керек.

Б) $B_1 - F_m$ божомолдорунун бири болсун дейли. Анда $F_m \rightarrow B_1$ формуласы $F_m \rightarrow F_m$ түрүнө ээ болот. Бирок бул формула бир гана $F_1, \dots, F_{m-1}$ божомолдорунан гана келип чыгуучу эмес, жөн гана аксиомалардан да келип чыгуучу.

2) $l \leq k$ болсун дейли. (3) ырастоо бардык $l \leq k$ үчүн туура жана бардык зарыл болгон корутундулар (2) удаалаштыктын k биринчи формулаларынын алдына кошулду деп эсептейли.

3) $l = k + 1$ болсун дейли. (3) ырастоо $l = k + 1$ үчүн туура экендигин, башкача айтканда

$$F_1, \dots, F_{m-1} \models F_m \rightarrow B_{k+1}$$

келтирип чыгуучулугу орун алаарын көрсөтөлү.

B_{k+1} формуласы – $F_1, \dots, F_{m-1}, F_m$ божомолдорунан G корутундусу болуп саналган (1) удаалаштыктын мүчөсү катары төмөнкүдөй мүмкүнчүлүктөр туюнтулушу ыктымал:

А), Б) B_{k+1} же аксиомалардын бири, же $F_1, \dots, F_{m-1}, F_m$ божомолдорунун бири болуп саналат. Берилген мүмкүнчүлүктөр $l = 1$ учурунан тиешелүү мүмкүнчүлүктөргө аналогиялуу (ал жерде болгону B_1 ди B_{k+1} ге алмаштыруу керек).

В) B_{k+1} (1) удаалаштыктан МП эрежеси боюнча эки удаалаш B_i , B_j мурунку формулалардан алынат. Натыйжада, $1 \leq i < k + 1$, $1 \leq j < k + 1$ жана j формуласы $B_i \rightarrow B_{k+1}$ түрүнө ээ, башкача айтканда $B_j \equiv B_i \rightarrow B_{k+1}$.

$1 \leq i < k + 1$ жана $1 \leq j < k + 1$ болгондуктан, $F_m \rightarrow B_j$ жана $F_m \rightarrow B_i$ формулалары (2) удаалаштыкта $F_m \rightarrow B_{k+1}$ формуласынын алдында турушат, жана жыйынтыгында, индукция божомолу боюнча бул формулалардын корутундулары $F_1, \dots, F_{m-1}$ божомолдорунан келип чыккандыгы жөнүндө ырастоо туура болот.

Бул корутундуларды удаалаш жазып чыгалы:

.....

$$(\alpha) \quad F_m \rightarrow B_i,$$

.....

$$(\alpha + \beta) \quad F_m \rightarrow (B_i \rightarrow B_{k+1}).$$

Бул корутундуларды төмөнкү формулалар менен улантабыз:

$$(\alpha + \beta + 1) \quad (F_m \rightarrow (B_i \rightarrow B_{k+1})) \rightarrow ((F_m \rightarrow B_i) \rightarrow (F_m \rightarrow B_{k+1})),$$

$$(\alpha + \beta + 2) \quad (F_m \rightarrow B_i) \rightarrow ((F_m \rightarrow B_{k+1})),$$

$$(\alpha + \beta + 3) \quad F_m \rightarrow B_{k+1}.$$

Формулалардын биринчиси (A2) аксиомасы, экинчи формула биринчиден жана $(\alpha + \beta)$ формуласынан МП эрежеси боюнча, үчүнчү экинчиден жана (α) формуласынан

МП эрежеси боюнча алынган. Ошентип, бул учурда түзүлгөн удаалаштык $F_1, \dots, F_{m-1}$ божомолдоруна $F_m \rightarrow B_{k+1}$ формуласынын корутундусу болуп эсептелет.

Демек, (3) ырастоо каалагандай $l = 1, 2, \dots, s$ үчүн туура.

$l = s$ болгон учурда $F_1, \dots, F_{m-1} \vdash F_m \rightarrow G$ ээ болобуз, ушуну далилдөө талап кылынган.

Дедукция жөнүндө теореманын колдонулушу

Лемма. Каалагандай F, G, H формулалары үчүн төмөнкүдөй келип чыгуучулук орун алсын:

а) $F \rightarrow G, G \rightarrow H \vdash F \rightarrow H$;

б) $F \rightarrow (G \rightarrow H), G \vdash F \rightarrow H$.

Далилдөө. а) Алгач, $F \rightarrow G, G \rightarrow H \vdash F \rightarrow H$ экендигин көрсөтөлү. Ал үчүн тиешелүү корутунду болуп саналган удаалаштыкты түзөлү: $F \rightarrow G, G \rightarrow H, F, G, H$.

Түшүндүрөлү:

Удаалаштыктын биринчи үч формуласы божомолдун маңызы.

Төртүнчү G формуласы удаалаштыктын биринчи жана үчүнчү формулаларынан МП эрежеси менен алынган, ал эми бешинчи болсо – экинчи жана төртүнчүдөн ошол эле эреже аркылуу алынган.

Демек,

$$F \rightarrow G, G \rightarrow H \vdash F \rightarrow H$$

болот. Мындан дедукция жөнүндө теоремадан

$$F \rightarrow G, G \rightarrow H \vdash F \rightarrow H$$

алабыз.

Теорема 3. Каалагандай F, G формулалары үчүн төмөнкү формулалар айтылыштарды формалдаштырып эсептөөнүн теоремалары болуп саналышат:

- а) $\neg\neg F \rightarrow F$;
- б) $F \rightarrow \neg\neg F$;
- в) $\neg F \rightarrow (F \rightarrow G)$;
- г) $(\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow (F \rightarrow G)$;
- д) $(F \rightarrow G) \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg F)$;
- е) $F \rightarrow (\neg G \rightarrow (F \rightarrow G))$;
- ж) $(F \rightarrow G) \rightarrow ((\neg F \rightarrow G) \rightarrow G)$.

Тыянак чыгаруунун туунду эрежелери

Экинчи жолу келтирип чыгаруу эрежелери *туунду тыянак эрежелери* деп аталат.

Аларды 2 топко бөлөбүз жана 2 теоремада формулировкалайбыз:

биринчисинде логикалык байланыштарды кийирүүнүн туунду эрежелери, ал эми экинчиси ошондой байланыштарды жокко чыгаруунун туунду эрежелери.

Мисалы,

$$\frac{\Gamma \vdash F; \Gamma \vdash F \rightarrow G}{\Gamma \vdash G}$$

эрежеси “Эгер $\Gamma \vdash F$ жана $\Gamma \vdash F \rightarrow G$, анда $\Gamma \vdash G$ болот” дегенди түшүндүрөт.

Теорема 4. (логикалык байланыштарды кийирүү эрежеси). Логикалык байланыштарды кийирүү эрежелери деп аталган төмөнкүдөй келтирилип чыгарылуучу туунду

эрежелери орун алат (мында Γ -формулалардын бош көптүгү болушу да мүмкүн болгон кандайдыр бир көптүк):

а) импликацияны кийирүү:

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \rightarrow G}$$

б) конъюнкцияны кийирүү:

$$\frac{\Gamma \vdash F, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}$$

в) дизъюнкцияны кийирүү:

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G},$$

$$\frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}$$

г) танууну кийирүү (абсурдга алып келүү):

$$\frac{\Gamma, F \vdash G; \Gamma, F \vdash \neg G}{\Gamma \vdash \neg F}.$$

Теорема 5. (логикалык байланыштарды жокко чыгаруу эрежеси). Логикалык байланыштарды жокко чыгаруу эрежеси деп аталган төмөнкүдөй тыняк чыгаруунун туунду эрежелери орун алат (мында Γ -формулалардын бош көптүгү болушу да мүмкүн болгон кандайдыр бир көптүк):

а) импликацияны жокко чыгаруу:

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Gamma \vdash F \rightarrow G}{\Gamma \vdash G}$$

б) конъюнкцияны жокко чыгаруу:

$$\frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F},$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G}$$

в) конъюнкцияны жокко чыгаруу:

$$\frac{\Gamma, F, G \vdash H}{\Gamma, F \wedge G \vdash H}$$

г) дизъюнкцияны жокко чыгаруу (Генцен)

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G, \Gamma, \Gamma \vdash H, \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}$$

д) дизъюнкцияны жокко чыгаруу (Клини)

$$\frac{\Gamma, F \vdash H, \Gamma, G \vdash H}{\Gamma, F \vee G \vdash H}$$

е) танууну күчтүү жокко чыгаруу

$$\frac{\Gamma \vdash \neg \neg F}{\Gamma \vdash F}$$

ж) танууну алсыз жокко чыгаруу

$$\frac{\Gamma \vdash F; \Gamma \vdash \neg F}{\Gamma \vdash G}$$

Текшерүү үчүн суроолор:

Тыянак деген эмне жана анын касиеттерин атагыла.

Дедукция жөнүндөгү теоремадан кандай натыйжалар алынат жана аларды мисалдар менен түшүндүргүлө.

Дедукция жөнүндөгү теоремадан кандай натыйжалар алынат жана аларды мисалдар менен түшүндүргүлө.

Дедукция жөнүндө теореманы практикалык логикалык маселелерди чечүүдө кантип колдонууга болот?

Предикаттар логикасы

Математикалык логика изилдеген айтылыштардан кийинки маанилүү предмет болуп предикаттар саналат. Предикат түшүнүгү айтылыш түшүнүгүн жалпылайт, ал эми предикаттар теориясы – математикалык логиканын предметин түзгөн тыянак чыгаруу жана логикалык натыйжа процесстеринин мыйзам-ченемдүүлүктөрүн изилдөө үчүн айтылыштар теориясына салыштырмалуу кыйла кылдат курал болуп саналат. Кошумчалай кетсек, 20-кылымдын 70-жылдарында предикаттык логика тилинин негизинде Prolog аттуу программалоо тили түзүлгөн, ал жасалма интеллект системаларын долбоорлоодо көптөгөн колдонмолорду тапкан.

Предикат түшүнүгү

Айтылыштарда баары ачык-айкын көрүнүп турат: бул конкреттүү объекттердин чын же жалган экендигин аныкталат. Предикат – айтылышка окшош сүйлөм, бирок анын чын же жалган экенин аныктоо мүмкүн эмес.

Аныктама 1. $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүктөрүндө аныкталган n -орундуу предикат деп, $x_1, x_2, \dots, x_n$ n өзгөрүлмөнү камтыган, тиешелүү түрдө $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүктөрүнөн алынган каалагандай конкреттүү өзгөрүлмөлөрдү койгондо, айтылышка айландыруучу сүйлөм аталат.

n -орундуу предикат үчүн $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ белгилөөсүн колдонобуз. $x_1, x_2, \dots, x_n$ өзгөрүлмөлөрү предметтик деп аталып, ал өзгөрүлмөлөр кабыл алган $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүктөрүнүн элементтери – конкреттүү предметтер деп аталат. $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүгүндө аныкталган каалагандай $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -орундуу предикат көрсөтүлгөн көптүктө берилген жана бардык айтылыштардын көптүгүндө маанилерди кабыл алуучу n

аргументтүү функцияны берет. Ошол себептен предикат функция – айтылыш деп да аталат.

Мисалдарды карайлы. “ x дарыясы Байкал көлүнө куят” сүйлөмү дарыялардын аталыштарынын көптүгүндө аныкталуучу бир орундуу предикат болуп саналат. x предметтик өзгөрүлмөсүнүн ордуна “Ангара” аталышын койсок, “Ангара дарыясы Байкал көлүнө куят” айтылышын алабыз. Бул айтылыш чын. x предметтик өзгөрүлмөсүнүн ордуна “Селигер дарыясы Байкал көлүнө куят” – жалган айтылышын алабыз.

Экинчи мисал. $x^2 + y^2 \leq 16$ сүйлөмү (барабарсыздыгы) R көптүгүндө берилген эки орундуу предикат болуп саналат. Көптүктөрдө берилген эки орундуу предикаттар дал келишет. Эки орундуу предикаттар R көптүгүндө берилген деп айтышат. (2; 3) сандарынын түгөйү берилген предикатты чын айтылышка айландырат, башкача айтканда, “ $2^2 + 3^2 \leq 16$ ” – чын айтылыш, ал эми (3; 3) сандарынын түгөйү жалган айтылышка айландырат, башкача айтканда “ $3^2 + 3^2 \leq 16$ ” – жалган айтылыш.

Предикаттардын классификациясы

Аныктама. $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүгүндө берилген $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикаты

А) теңдеш чын деп аталат, эгерде $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүгүнөн алынган каалагандай $a_1, a_2, \dots, a_n$ конкреттүү предметтерин $x_1, x_2, \dots, x_n$ өзгөрүлмөлөрүнүн ордуна койгондо, $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чын айтылышка айланса;

Б) теңдеш жалган деп аталат, эгерде $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүгүнөн алынган каалагандай $a_1, a_2, \dots, a_n$ конкреттүү предметтерин $x_1, x_2, \dots, x_n$ өзгөрүлмөлөрүнүн ордуна койгондо, $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ жалган айтылышка айланса;

В) аткарылуучу (ишке ашырылуучу) деп аталат, эгерде $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикатындагы тиешелүү

предметтик өзгөрүлмөлөрдү койгондо, акыркы $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чын (жалган) айтылышка айланган $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүгүнөн алынган эч болбосо $a_1, a_2, \dots, a_n$ конкреттүү предметтердин бир топтому жашаса.

Мисалдарды келтирели.

Шаарлардын аталыштарынын көптүгүндө аныкталган “ x шаары Ысык-Көлдүн жээгинде жайгашкан” бир орундуу предикаты аткарылуучу болуп саналат, анткени берилген предикатты чын айтылышка айландыруучу шаарлары жашайт, мисалы: Чолпон-Ата, Балыкчы, Кара-Кол. Бирок бул предикат теңдеш жалган эмес, бирок ишке ашырылуучу предикатка мисал боло алат.

Экинчи мисал. Чыныгы сандардын көптүгүндө аныкталган $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ бир орундуу предикаты теңдеш чын предикат болуп саналат. Чыныгы сандардын көптүгүндө берилген $x^2 + y^2 \leq 0$ эки орундуу предикат теңдеш жалган предикат болуп саналат, ошондуктан чыныгы сандардын каалагандай түгөйү аны жалган айтылышка айландырат (аны канааттандырбайт).

Түрдүү типтеги предикаттардын ортосунда өз ара байланыштардын айрым мыйзам-ченемдүүлүктөрүн белгилейли:

1. Ар бир теңдеш чын предикат аткарылуучу болуп саналат, бирок тескериси туура эмес;
2. Ар бир теңдеш жалган предикат ишке ашырылуучу болуп саналат, бирок тескериси туура болбойт;
3. Ар бир теңдеш эмес чын предикат ишке ашырылуучу болуп саналат, бирок теңдеш жалган предикат болбойт;
4. Ар бир теңдеш эмес жалган предикат аткарылуучу болуп саналат, бирок жалпы айтканда теңдеш чын предикат болбойт.

Предикаттын чындык көптүгү

Аныктама. $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүктөрүндө берилген $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикатынын чындык көптүгү деп, $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ ордуна коюусун койгондо, берилген предикат $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чын айтылышына айланган $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$ болгондой, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ n – бардык иреттелген системалардын жыйындысы аталат.

Ал көптүктү P^+ түрүндө белгилейбиз.

$$P^+ = \{(a_1, a_2, \dots, a_n): \lambda(P(a_1, a_2, \dots, a_n)) = 1\}$$

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n орундуу предикатынын P^+ чындык көптүгү $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүгүнүн элементтеринин ортосундагы n ардуу катышты берет.

Чыныгы сандардын көптүгүндө берилген $x^2 + y^2 = 9$ эки орундуу предикатынын чындык көптүгү борбору координата башталышы, радиусу 3 кө барабар болгон айлананы түзүүчү бардык чыныгы сандардын түгөйлөрүнүн көптүгүн берет.

$|a| > 2$ бир орундуу предикатынын чындык көптүгү

$$A^+ =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[.$$

Теңдемени чыгаруу керек болсун (предикаттын чындык көптүгүн табалы):

$$4x - 2 = -3x - 9.$$

Аны эквиваленттүү түрдө өзгөртөлү:

$$4x - 2 = -3x - 9 \Leftrightarrow 4x + 3x = -9 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1.$$

Жообу: $\{-1\}$.

Предикаттардын тең күчтүүлүгү

Аныктама. $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүктөрүндө берилген P, Q предикаттары тең күчтүү деп аталышат, эгерде көптүктөрдүн элементтеринин топтомдору үчүн P предикатын чын айтылышка айландырган топтомдордо Q предикаты да чын айтылышка айланса.

Башкача айтканда P, Q предикаттары тең күчтүү болот, качан гана алардын чындык көптүктөрү дал келгенде:

$$P^+ = Q^+.$$

P, Q предикаттарынын тең күчтүүлүгү жөнүндө ырастоо символдук түрдө

$$P \Leftrightarrow Q$$

жазылат.

Предикаттардын тең күчтүүлүк катышы эквиваленттүүлүк катышы болуп саналат, демек, $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүктөрүндө бардык n -орундуу предикаттардын жыйындысы тең күчтүү предикаттардын кесилишпөөчү класстарына ажырайт. Алардын баары $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүктөрүндө берилген жана $\{0; 1\}$ эки элементтүү көптүгүндөгү маанилерди кабыл алуучу бир эле функцияны аныкташат. P_1 предикатынан ага тең күчтүү P_2 предикатына өтүү биринчини тең күчтүү өзгөртүп түзүү деп аталат.

Бул түшүнүк мектептик математика курсу үчүн маанилүү, себеби анда өздөштүрүлүүчү теңдемелер жана барабарсыздыктар предикаттардын жекече учурларын берет. Теңдемени жана барабарсыздыкты чыгаруу бул анын чындык көптүгүн аныктоо болуп саналат.

Мындай процессти аткарууда биз теңдемелердин жана барабарсыздыктардын үстүнөн түрдүү өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүп, башкача айтканда табылган көптүк берилген

тендеме же барабарсыздыктын чындык көптүгү болушу керек.

Аналогиялуу кырдаал теңдемелер же барабарсыздыктар системасын чыгарууда болот.

Текшерүү үчүн суроолор:

Предикат деген эмне жана ал айтылыштар логикасында кандай роль ойнойт?

Предикаттарды кандай негиздер боюнча классификациялоого болот, мисал келтиргиле.

Предикаттын чындык көптүгү деген эмне жана ал кантип түзүлөт?

Предикаттардын тең күчтүүлүгү эмнени билдирет жана аны кантип аныктоого болот?

Предикаттардын үстүнөн логикалык операциялар

***Аныктама.** $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүктөрүндө берилген $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикатынын тануусу деп $\neg P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ түрүндө белгиленген, $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ эмес деп окулган жаңы предикат аталат.*

Мисалы:

$x \leq 3$ предикатынын тануусу: $x > 3$

“ x дарыясы Байкал көлүнө куят” предикатынын тануусу “ x дарыясы Байкал көлүнө куйбайт”

“ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ” предикатынын тануусу:

$$\sin^2 x + \cos^2 x \neq 1.$$

P жана Q эки предикаттын эквиваленттүүлүгү жөнүндөгү билдирүүнү символикалык түрдө төмөнкүчө жазабыз: $P \Leftrightarrow Q$. Предикаттардын эквиваленттүүлүк катышы эквиваленттүүлүк байланыш болуп саналат, ошондуктан

көптүктөрдө аныкталган бардык n -орундуу предикаттардын көптүгү $M_1, M_2, \dots, M_n$, эквиваленттүү предикаттардын бөлүнүүчү класстарына кирет. P_1 предикатынан эквиваленттүү P_2 предикатына өтүү биринчинин эквиваленттүү трансформациясы деп аталат. Бул түшүнүк мектеп математикасы үчүн өтө маанилүү, анткени анда изилденген теңдемелер жана барабарсыздыктар предикаттардын өзгөчө түрлөрү болуп саналат. Теңдемени жана барабарсыздыктарды чыгаруу анын чындык көптүгүн издөө болуп саналат.

Аныктама. $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүгүндө аныкталган n -орундуу $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикатынын жана $N_1, N_2, \dots, N_m$ көптүгүндө аныкталган m оорундуу $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ предикатынын конъюнкциясы деп, $M_1, M_2, \dots, M_n, N_1, N_2, \dots, N_m$ көптүктөрүндө аныкталган, берилген эки предикат тең чын айтылышка айлана турган бардык предметтик өзгөрүлмөлөрдүн бул эсе тигил маанилеринде чын айтылышка айланган

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

деп белгиленип, “ $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ жана $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ” деп окулган жаңы “ $n + m$ ” оорундуу предикат аталат.

Башкача айтканда,

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

предикаты бардык $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$ жана $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \dots, b_m \in N_m$ предметтер үчүн

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) \wedge Q(b_1, b_2, \dots, b_m)$$

айтылышы $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ жана $Q(b_1, b_2, \dots, b_m)$ айтылыштарынын конъюнкциясы болуп саналат.

Мисалы, R көптүгүндө аныкталган “ $x > -3$ ” жана “ $x < 3$ ” бир оорундуу предикаттарынын конъюнкциясы болуп төмөнкү бир оорундуу предикат эсептелет:

$$x > -3 \wedge x < 3$$

же кыскача түрдө $-3 < x < 3$ деп жазылат, акыркы кош барабарсыздык болсо, $|x| < 3$ предикатына тең күчтүү.

Дагы 1 мисалды R көптүгүндө аныкталган “ $x = 0$ ” жана “ $y = 0$ ” бир орундуу предикаттарынын конъюнкциясы болуп төмөнкү эки орундуу предикат эсептелет:

$$x = 0 \wedge y = 0.$$

Бул предикат R көптүгүндө аныкталган $x^2 + y^2 = 0$ предикатына тең күчтүү.

Теорема. $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүгүндө аныкталган n -орундуу $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ жана $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикаттары үчүн $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конъюнкциясынын чындык көптүгү берилген предикаттардын чындык көптүктөрүнүн кесилиши менен дал келет:

$$(P \wedge Q)^+ = P^+ \cap Q^+.$$

Мисал.

$$((|x| < 3) \wedge (x \geq 2))^+ = (|x| < 3)^+ \cap (x \geq 2)^+ =] - 3, 3[\cap [2, +\infty[= [2, 3[.$$

Аныктама. $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүгүндө аныкталган n орундуу $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикатынын жана $N_1, N_2, \dots, N_m$ көптүгүндө аныкталган m орундуу $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ предикатынын дизъюнкциясы деп, $M_1, M_2, \dots, M_n, N_1, N_2, \dots, N_m$ көптүктөрүндө аныкталган, берилген эки предикат тең чын айтылышка айлана турган бардык предметтик өзгөрүлмөлөрдүн бул же тигил маанилеринде эч болбосо, берилген предикаттардын бирөөсү чын айтылышка айланган

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

деп белгиленип, “ $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ же $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ” деп окулган жаңы “ $n + m$ ” орундуу предикат аталат.

Башкача айтканда,

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

предикаты бардык $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$ жана $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \dots, b_m \in N_m$ предметтер үчүн

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) \vee Q(b_1, b_2, \dots, b_m)$$

айтылышы $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ жана $Q(b_1, b_2, \dots, b_m)$ айтылыштарынын дизъюнкциясы болуп саналат.

Мисал. N көптүгүндө аныкталган “ x – жуп сан” жана “ x – жөнөкөй сан” бир орундуу предикаттарынын дизъюнкциясы болуп, төмөнкү бир орундуу предикат эсептелет:

$$\text{“}x \text{ – жуп же жөнөкөй сан”}$$

Теорема. $M_1, M_2, \dots, M_n$ көптүгүндө аныкталган n орундуу $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ жана $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикаттары үчүн

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

дизъюнкциясынын чындык көптүгү берилген предикаттардын чындык көптүктөрүнүн биригүүсү менен дал келет:

$$(P \vee Q)^+ = P^+ \cup Q^+.$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

импликациясы бардык $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$ жана $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, \dots, b_m \in N_m$ предметтер үчүн

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow Q(b_1, b_2, \dots, b_m)$$

айтылышы $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ жана $Q(b_1, b_2, \dots, b_m)$ айтылыштарынын импликациясы болуп саналат. Ушуга аналогиялуу предикаттардын эквиваленциясы аныкталат.

Теорема. Эгер тиешелүү көптүктөрдө аныкталган P, Q, R формулаларды предикаттар катары түшүнсөк, $\leftrightarrow$ белгисин $\Leftrightarrow$ белгисине, ал эми $\rightarrow$ белгисин $\Rightarrow$ белгисине алмаштырсак, анда предикаттар жөнүндө туура же чын ырастоолорду алабыз.

Текшерүү үчүн суроолор:

Предикаттарды тануу кандайча аныкталат жана анын логикалык мааниси эмнеде?

Эки предикаттын конъюнкциясы кандай шартта чындыкка туура келет?

Эки предикаттын дизъюнкциясы кайсы учурда чын болуп эсептелет?

Тануу, конъюнкция жана дизъюнкция касиеттери операцияларынын негизги касиеттерин атап бергиле

Предикаттардын үстүнөн квантордук операциялар

Жалпылык квантору. Бир орундуу предикатты айтылышка айландыруу үчүн, анын өзгөрмөсүнүн ордуна предикаттын берилүү областынан кандайдыр бир конкреттүү предметти коюу керек. Мындай өзгөртүүнүн дагы бир жолу – бул предикатка жалпылык кванторун же жашоо кванторун байланыштыруу операциясын колдонуу. Бул операциялардын ар бири бир орундуу предикатка берилген предикаттын көз-карандылыкта чын же жалган айтылышты туура келтирет.

Аныктама. Жалпылык квантору менен байланыштыруу операциясы деп, M көптүгүндө аныкталган ар бир бир орундуу $P(x)$ предикаты теңдеш чын жана каршы учурда жалган болгондо, башкача айтканда

$$\lambda(\forall x)P(x) = \begin{cases} 1, \text{ эгер } P(x) - \text{ теңдеш чын предикат,} \\ 0, \text{ эгер } P(x) - \text{ жокко чыгарылган предикат} \end{cases}$$

чын болгон $(\forall x)P(x)$ деп белгиленген (каалагандай x [тин мааниси] үчүн $P(x)$ [чын айтылыш] деп окулган) айтылыш тиешелеш келтирилүүчү эреже аталат.

$(\forall x)P(x)$ айтылышты окууда квадраттык кашаадагы сөздөр окулбашы мүмкүн. $(\forall x)P(x)$ айтылышы $P(x)$ предикаты үчүн универсалдык айтылыш деп аталат.

$\forall$ символу “All” англис тилинин бардык сөзүнүн биринчи тамгасынан алынган. $(\forall x)$ символунун өзүн дагы x өзгөрмөсү боюнча жалпылык квантору деп аталат.

Натуралдык сандардын көптүгүндө эки бир орундуу предикатты карайлы: “ $1 \leq x$ ” жана “ $x/30$ ”.

Биринчи предикат теңдеш чын, ошол себептен аны менен жалпылык кванторун байланыштыруучу операцияны колдонуу $(\forall x)(1 \leq x)$ – “каалагандай x үчүн бир x тен ашпайт”.

Экинчи предикат жокко чыгарылуучу, ошол себептен ага колдонулган жалпылык квантору жалган айтылышты берет: $(\forall x)(x/30)$ – “каалагандай x үчүн x 30 санынын бөлүүчүсү болуп саналат”.

Эгер $P(x)$ бир орундуу предикаты $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ чектүү көптүгүндө берилсе, анда $(\forall x)P(x)$ айтылышы

$$P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

конъюнкциясына эквиваленттүү.

Чектүү көптүктөрдө берилген предикаттар үчүн жалпылык квантору менен байланышуучу операция конъюнкция аркылуу туюнтууга болот. Чексиз көптүктөрдө берилген предикаттар үчүн орун албайт.

Натуралдык сандардын көптүгүндө аныкталган “ $y \leq x$ ” эки орундуу предикатын карайлы. x өзгөрмөсү боюнча жалпылык кванторун ага колдонолу. y тен көзкаранды болгон $(\forall x)(y \leq x)$ бир орундуу предикатты

алабыз. Бул предикат чын айтылыш сыяктуу ($y = 1$ болгондо) сыяктуу, жалган айтылышка да айланышы мүмкүн (y тин 1 ден башка каалагандай натуралдык маанилерин койгондо).

Эки орундуу предикат.

” $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ” чыныгы сандардын көптүгүндө аныкталган эки орундуу предикат теңдеш чын. Ошондуктан, ага каалагандай өзгөрмө боюнча жалпылык кванторун колдонуу

$$(\forall y)((x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2)$$

теңдеш чын бир орундуу предикатты берет.

Жашоо квантору

Аныктама. Жашоо кванторун байланыштыруучу операция деп, M көптүгүндө аныкталган ар бир $P(x)$ бир орундуу предикатына $P(x)$ теңдеш жалган болгондо гана жалган жана тескери учурда чын болгон, башкача айтканда

$$\lambda(\exists x)P(x) = \begin{cases} 1, & \text{эгер } P(x) - \text{теңдеш жалган предикат,} \\ 0, & \text{эгер } P(x) - \text{орун алуучу предикат.} \end{cases}$$

болгондо $(\exists x)P(x)$ деп белгилеген ($[x$ тин мааниси] үчүн $P(x)$ [чын айтылыш] жашайт же табылат деп окулган) айтылыш тиешелеш келтирилүүчү эреже аталат.

$(\exists x)P(x)$ айтылышты окууда квадраттык кашаадагы сөздөр окулбашы мүмкүн. $(\exists x)P(x)$ айтылышы $P(x)$ предикаты үчүн экзистенциалдык айтылыш деп аталат.

$\exists$ символу “Exist” англис тилинин жашоо сөзүнүн биринчи тамгасынан алынган. $(\exists x)$ символунун өзүн дагы x өзгөрмөсү боюнча жашоо квантору деп аталат.

Мисал:

Натуралдык сандардын көптүгүндө аныкталган “ $x=x+1$ ” жана “ $x/30$ ” эки бир орундуу предикаттарды карайлы.

Биринчи предикат теңдеш жалган, ошол себептен ага жашоо кванторун байланыштыруучу операцияны колдонуу жалган айтылышты берет: $(\exists x)(x = x+1)$ – натуралдык санга өзүнө 1 ди кошкондо ошол санга барабар сан жашайт. Экинчи предикат орун алуучу, ошол себептен ага колдонулуучу жашоо квантору чын айтылышты берет: $(\exists x)(x/30) - 30$ га бөлүнүүчү сан жашайт.

Эгер $P(x)$ бир орундуу предикаты $M = a_1, a_2, \dots, a_n$ чектүү көптүгүндө берилсе, анда $(\exists x)P(x)$ айтылышы $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$ дизъюнкциясына эквиваленттүү.

Чыныгы сандардын көптүгүндө аныкталган “ $y \leq x$ ” эки орундуу предикатын карайлы. x өзгөрмөсү боюнча жашоо кванторун ага колдонолу. y тен көз-каранды болгон $(\exists x)(y \leq x)$ бир орундуу предикатты алабыз. Бул предикат y тин ордуна конкреттүү сандарды койгондо, чын айтылышка айланышат.

Текшерүү үчүн суроолор:

Жашоо квантору деген эмне жана ал предикаттар логикасында кандай мааниге ээ?

Сандык кванторлор деген эмне жана алар кантип колдонулат?

Чектелген кванторлор эмнени билдирет жана аларды мисал аркылуу түшүндүргүлө.

Логикалык квадрат деген эмне жана ал кайсы учурларда колдонулат?

Адабияттар

1. Игошин В.И. Математическая логика: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2016. -399с.
2. Агарева О.Ю., Селиванов Ю.В. Элементы математической логики: Учебное пособие. М. -2008. - 108с.
3. Прокопенко Н.Ю. Математическая логика и Булевы функции.: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород, 2021. -108с.
4. Алябьева В.Г. Математическая логика: Учебное пособие. – Пермь, 2017. -11с.
5. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: ИНФРА-М, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004.
6. Шабунин Л.В. Математическая логика. Логика высказываний и логика предикатов. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2003.
7. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – М.: Наука, 1987.
8. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1984.
9. Клини С. К. Математическая логика. – М.: Мир, 1973.
10. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. – М.: ИЛ, 1947.
11. Колмогоров А.Н., Драгагин А.Г. Введение в математическую логику. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
12. Новиков П. С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973.
13. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М.: Наука, 1983.
14. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: ИЦ Академия, 2004.
15. Яглом И.М. Булева структура и ее модели. М.: Сов. радио, 1980.

МАЗМУНУ:

Кириш сөз	3
Азыркы билим берүү системасындагы математикалык логика.....	4
Айтылыштар алгебрасы.....	8
Айтылыштар алгебрасынын формулалары.....	14
Айтылыштар алгебрасынын тавтологиялары.....	20
Формулалардын логикалык тең күчтүүлүгү.....	27
Айтылыштар алгебрасынын нормалдык формалары	31
Формулалардын логикалык натыйжасы.....	37
Логикалык ой корутуу эрежелеринин мисалдары....	41
Логика-математикалык практикадагы айтылыштар алгебрасынын тиркемелери.....	48
Математикалык теоремалардын структурасын модификациялоо.....	52
Бульдук функциялар жана алардын колдонулушу.....	53
Бир жана эки аргументтүү бульдук функциялар.....	55
Аксиомалардын системасы жана формалдуу тыянак теориясы.....	66

Дедукция жөнүндө теорема жана анын натыйжалары.....	70
Дедукция жөнүндө теореманын колдонулушу.....	73
Предикаттар логи­касы.....	77
Предикаттын чындык көптүгү.....	80
Предикаттардын тең күчтүүлүгү.....	81
Предикаттардын үстүнөн логикалык операциялар...	82
Предикаттардын үстүнөн квантордук операциялар..	86
Адабияттар	90